

## PROGRAMA DE CURSO

Código	Nombre			
MA5803	Grupos, geometría y dinámica			
Nombre en Inglés				
Groups, geometry and dynamics				
SCT	Unidades Docentes	Horas de Cátedra	Horas Docencia Auxiliar	Horas de Trabajo Personal
6	10	3,0	2,0	5,0
Requisitos			Carácter del Curso	
MA3801 (Análisis) y (MA3101 (Elementos de Álgebra) o MA3705 (Algoritmos Combinatoriales) o autorización)			Electivo de Carrera, Magister y Doctorado.	
Resultados de Aprendizaje				
<p>El objetivo de este curso es entregar a los alumnos los elementos básicos de la teoría de los grupos, que tienen aplicaciones en álgebra, geometría y dinámica.</p> <p>Los alumnos comprenderán los tópicos principales de grupos de simetrías y de matrices, grupos geométricos y combinatoriales y algunos resultados importantes sobre la clasificación y la geometría global de grupos. Desarrollarán sus habilidades analíticas y profundizarán sus conocimientos en el área de álgebra.</p>				

Metodología Docente	Evaluación General
<p>Clases expositivas y presenciales de cátedra.</p> <p>Clases auxiliares de exposición de problemas y de resolución de problemas guiados.</p>	<p>2 controles parciales más un examen final.</p> <p>Tareas para complementar la evaluación.</p>

### Resumen de Unidades Temáticas

Número	Nombre de la Unidad	Duración en Semanas
1	Teoría de grupos – definiciones y resultados básicos (repaso)	1,5
2	Grupos de simetrías e isometrías	2
3	Grupos finitamente generados y/o presentados	3
4	Grupos lineales y representación por matrices	3
5	Objetos geométricos y el grupo fundamental	2
6	Geometría global de los grupos combinatoriales	3,5
	<b>TOTAL</b>	<b>15</b>

## Unidades Temáticas

Número	Nombre de la Unidad	Duración en Semanas	
<b>1</b>	<b>Teoría de grupos – resultados básicos</b>	<b>1,5</b>	
Contenidos		Resultados de Aprendizajes de la Unidad	Referencias a la Bibliografía
<p><b>Teoría:</b> Operación binaria, (semi-)grupos, subgrupos, clases laterales, conjugación, homomorfismos e isomorfismos, cocientes, subgrupos normales, teorema de Lagrange, teoremas de isomorfismo, teorema de Cayley, producto directo y semi-directo, extensión de grupos, endomorfismos, automorfismos interiores y exteriores, series de descomposición</p> <p><b>Ejemplos:</b> Grupos cíclicos, grupos abelianos (clasificación), grupos de permutaciones, grupos simples, solubles y nilpotentes</p>		<p>La primera parte del curso presenta un rápido repaso de materia básica de teoría de grupos con sus definiciones y algunos resultados fundamentales.</p> <p>Los alumnos conocerán las nociones habituales de la teoría de grupos y se familiarizarán con varias técnicas y clases de ejemplos.</p>	[1,2]

Número	Nombre de la Unidad	Duración en Semanas	
<b>2</b>	<b>Grupos de simetrías e isometrías</b>	<b>2</b>	
Contenidos		Resultados de Aprendizajes de la Unidad	Referencias a la Bibliografía
<p><b>Teoría:</b> Grupos de simetrías, poliedros regulares, grafos, simetrías finitas y discretas, simetrías del <math>\mathbb{R}^n</math> (<math>n=1,2,3</math>), isometrías del plano, de la esfera y del <math>\mathbb{R}^3</math> con sus subgrupos, representaciones normales, isometrías conjugadas, teorema de Leonardo</p> <p><b>Ejemplos:</b> Grupo dihedral, <math>\text{Isom}(\mathbb{R})</math>, <math>\text{Isom}(\mathbb{R}^2)</math>, <math>\text{Isom}(\mathbb{R}^3)</math>, <math>\text{SO}(2)</math>, <math>\text{SO}(3)</math>, <math>\text{O}(3)</math>, teselaciones y grupos cristaligráficos del plano</p>		<p>Se estudiarán en detalle varios grupos de simetrías de objetos geométricos y se clasificarán las isometrías Euclidianas.</p> <p>Los estudiantes comprenderán como muchos grupos abstractos tienen su origen en las simetrías. Conocerán la técnica de analizar estos grupos a través de formas normales y productos semi-directos.</p>	[1,5,6]

3	Grupos finitamente generados y presentados	3
Contenidos	Resultados de Aprendizajes de la Unidad	Referencias a la Bibliografía
<p><b>Teoría:</b> Generadores, relaciones, grafo de Cayley, métrica de palabras, caminos y geodésicas, problema de la palabra de Dehn, extensión HNN, producto libre, amalgamado y guirnalda (wreath), acciones de grupos sobre árboles, teorema de Schreier, propiedades de grupos (grupos de torsión, libre de torsión, grupos divisibles y residualmente finitos, grupos con distorsión, grupos de Hopf, localmente, virtualmente etc.), lenguajes y autómatas.</p> <p><b>Ejemplo:</b> Grupo libre, sus subgrupos y cocientes, grupos de Baumslag-Solitar, grupos infinitos de torsión, grupos de tipo Lamplighter</p>	<p>Este parte del curso se enfoca en los grupos combinatoriales con sus grafos de Cayley. Presenta varias propiedades, constucciones y resultados importantes, llegando a algunos problemas abiertos de la teoría.</p> <p>Los alumnos comprenderán técnicas para el estudio y el análisis de grupos finitamente generados. Conocerán también varios de los ejemplos típicos de esta teoría (ver ejemplos en la columna de contenidos).</p>	[1,3,5,8,9,10]

Número	Nombre de la Unidad	Duración en Semanas
4	Grupos lineales, representación por matrices	3
Contenidos	Resultados de Aprendizajes de la Unidad	Referencias a la Bibliografía
<p><b>Teoría:</b> Representación lineal de isometrías, geometrías (afín, proyectiva, conformal, esférica, hiperbólica), isometrías del plano hiperbólico, grupos lineales finitamente generados, teorema de Burnside, teorema de Schur, lema de Selberg, grupos de Lie con su álgebra de Lie</p> <p><b>Ejemplos:</b> <math>GL(n,K)</math> con sus subgrupos, grupos de matrices simétricas, ortogonales y unitarias, grupo unipotente, <math>PSL(2,R)</math>, grupo de Heisenberg, grupos de trenzas</p>	<p>Entender la conexión entre grupos lineales abstractos y sus representaciones como grupos de matrices entrega herramientas y técnicas de álgebra (lineal) para el estudio de los grupos de isometrías en las distintas geometrías.</p> <p>Los alumnos profundizarán sus conocimientos sobre grupos de isometrías. Conocerán ejemplos típicos y aprenderán algunos de los resultados más importantes sobre los grupos clásicos de matrices.</p>	[2,10,11]

5	Objetos geométricos y el grupo fundamental	2	
Contenidos		Resultados de Aprendizajes de la Unidad	Referencias a la Bibliografía
<p><b>Teoría:</b> Homeomorfismos, caminos, lazos y homotopías, espacios contractibles, equivalencia homotópica, grupo fundamental, espacio recubridor y el grupo de los automorfismos de recubrimiento (deck transformations), teorema de Van Kampen, complejos simpliciales, topología algebraica, extensiones, productos y otras construcciones</p> <p><b>Ejemplos:</b> Grupo fundamental de la circunferencia, del toro, grafos, buqué de circunferencias etc., grupos fundamentales abelianos, grupos de superficies, Fuchsianos, <math>PSL(2,R)</math></p>		<p>Esta sección presentará una breve introducción a algunas herramientas de la topología algebraica, sobre todo a los espacios recubridores y al grupo fundamental.</p> <p>Los estudiantes conocerán la construcción combinatorial de los grupos fundamentales. Se espera que pueden calcular y analizar estos grupos para obtener (algunos) invariantes de la clasificación de espacios geométricos.</p>	[2,5,12]

Número	Nombre de la Unidad	Duración en Semanas	
6	Geometría global de grupos combinatoriales	3,5	
Contenidos		Resultados de Aprendizajes de la Unidad	Referencias a la Bibliografía
<p><b>Teoría:</b> Crecimiento de grupos finitamente generados, cuasi-isometrías, conmensurabilidad, grupos convexos, extensiones y propiedades de grupos, invariantes (crecimiento geodésico, función de Dehn, extremos de grupos, cone types) y clasificación, teorema de Hopf, teorema de Gromov, grupos (elementalmente) amenables y no-amenables, condición de Følner, descomposición paradójica de Tarski, lema de Klein, alternativa de Tits, grupos LEF, grupos sóficos</p> <p><b>Ejemplos:</b> Grupos de crecimiento polinomial y exponencial, <math>SL(2,Z)</math>, <math>SL(3,Z)</math>, grupo de Grigorchuk, grupos de Thompson</p>		<p>La última parte del curso presentará las técnicas usadas para estudiar la geometría global de grupos finitamente generados. Destaca la clasificación por crecimiento dada por Gromov y el estudio de otras invariantes. Además presentará resultados sobre la clase de grupos amenables y grupos sóficos.</p> <p>El alumno aprenderá una parte moderna de la clasificación de grupos combinatoriales y conocerá varios resultados y problemas abiertos de esta teoría aún en desarrollo.</p>	[3,4,7]

## Bibliografía

Como material suplementario se sugieren los libros siguientes (los más recomendables están marcados con un (!)):

- (1) D. Robinson, A Course in the Theory of Groups (!)
- (2) J. Rotman, An Introduction to the Theory of Groups (!)
- (3) J. Meier, Groups, Graphs and Trees (!)
- (4) P. de la Harpe, Topics in geometric group theory (!)
- (5) A. Katok, V. Climenhaga, From Groups to Geometry and back
- (6) J. Conway, H. Burgiel, Ch. Goodman-Strauss, The symmetry of things
- (7) T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, Cellular automata and groups
- (8) W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, Combinatorial Group Theory
- (9) R. Lyndon, P. Schupp, Combinatorial Group Theory
- (10) J.-P. Serre, Trees
- (11) A. Beardon, The geometry of discrete groups
- (12) A. Hatcher, Algebraic topology

Vigencia desde:	Otoño 2018 (en adelante)
Elaborado por:	Programa desarrollado y escrito por Michael Schraudner