

| Código | Nombre | | | |
|--|--|------------------|--|---------------------------|
| MA5307 | Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales, Teoría y Laboratorio | | | |
| Nombre en Inglés | | | | |
| Numerical Analysis in Partial Differential Equations, Theory and Practice | | | | |
| SCT | Unidades Docentes | Horas de Cátedra | Horas docencia auxiliar y laboratorio (promedio semanal) | Horas de Trabajo Personal |
| 9 | 15 | 3 | 1.5 (aux) + 3(lab) | 7.5 |
| Requisitos | | | Carácter del Curso | |
| MA4802, AUTOR | | | Obligatorio con derecho a opción (plan 2007)/Obligatorio (plan 2014) | |
| Resultados de Aprendizaje | | | | |
| <p>El alumno aprende la teoría y práctica de los métodos fundamentales de resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales, a saber los métodos de: diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos. El alumno aplica las diferencias finitas a la resolución de problemas de difusión y transporte unidimensionales, los elementos finitos para estudiar en detalle la resolución de problemas elípticos de segundo orden y los volúmenes finitos a problemas elípticos de segundo orden escritos en forma de divergencia. El alumno desarrolla capacidades de cálculo científico mediante la implementación práctica de estos tres métodos a través de laboratorios computacionales y del desarrollo de un proyecto semestral en un ámbito más aplicado y de mayor complejidad.</p> | | | | |

| Metodología Docente | Evaluación General |
|--|---|
| <p>Clases de cátedra teóricas y auxiliares prácticas. Para un mayor desarrollo de la fortaleza del cálculo científico, el alumno puede complementa este curso con tareas teórico-computacionales dirigidas y proyectos aplicados a través de los laboratorios asociados.</p> | <p>Dos controles y un examen. Realización de 6 laboratorios obligatorios, presentación de un proyecto aplicado. La evaluación de los laboratorios está focalizada en la realización efectiva de éstos, ya que la asistencia a los laboratorios y la presentación de los informes finales de cada uno de estos es obligatoria. Habrá una nota de laboratorios (NL) que será un promedio ponderado entre la evaluación in situ y la presentación del informe la semana siguiente a cada laboratorio. La evaluación de los proyectos constituirá una nota única (NP) y será un promedio ponderado del avance, presentación final oral e informe final del proyecto. La nota final de laboratorios será 60% NL y 40% NP. La nota del curso final será 60% Nota de Controles y 40% nota de Laboratorios. Ambas actividades deben aprobarse por separado.</p> |

| Número | Nombre de la Unidad | Duración en Semanas |
|--------|---|---------------------|
| 1 | Método de Diferencias Finitas | 4 |
| 2 | Problemas variacionales y modelación | 2 |
| 3 | Método de Elementos Finitos | 5 |
| 4 | Método de Volúmenes Finitos | 3 |
| 5 | Temas de conducción, elasticidad, fluidos y ondas | 1 |
| | TOTAL | 15.0 |

| Número | Tema del Laboratorio | Semana de realización |
|---------------------------------|--|-----------------------|
| Lab 0 | Introducción al uso de matlab | 0 |
| Lab 1 | Método de Diferencias Finitas (Lab, conformación de grupos) | 2 |
| | Presentación Lab 1 (Aux) | 3 |
| Lab 2 | Método de las Diferencias Finitas, Dominio Perforado (Lab) | 4 |
| Lab 3 | Método de las Diferencias Finitas, Condición CFL (Lab) | 5 |
| | Presentación Lab 2 y 3 (Aux) | 6 |
| Lab 4 | Método de los Elementos Finitos, Problema Estacionario (Lab, semana máxima de elección de tema de proyecto, conformación de grupos) | 7 |
| Lab 5 | Método de Elementos Finitos, CB Mixtas y Problema de Evolución (Lab) | 8 |
| | Presentación Lab 4 y 5 (Aux) | 9 |
| Lab 6 | Método de los Elementos Finitos 2D/Volúmenes Finitos (Lab) (semana máxima para reunión de avance de proyecto con tutor) | 10 |
| | Presentación Lab 6 (Aux) | 11 |
| Presentaciones finales proyecto | Temas varios: flujo de la curvatura media y conjuntos de nivel, calor no lineal, problema de Stokes, ondas de superficie libre, problema de transmisión, formación de patrones, epidemiología, semiconductores, etc. (Aux+Lab) | 12, 13, 14 |

Nota importante sobre compatibilidad con otro curso tipo laboratorio simultáneo: Este laboratorio está diseñado para ser compatible con otro similar simultáneo para una misma generación. En este caso, la semana introductoria puede ser común. Además, se puede compartir un horario común para las salas de computadores equipadas.

Unidades Temáticas

| Número | Nombre de la Unidad | Duración en Semanas |
|---|---|--|
| 1 | Método de Diferencias Finitas | 4 |
| Contenidos | Resultados de Aprendizajes de la Unidad | Referencias a la Bibliografía |
| <p>1.- Introducción. Problema modelo: $-u_{xx} + bu_x + cu = f$ advección difusión con condiciones de borde Dirichlet.</p> <p>1.1. Noción de esquema numérico. Principio del máximo discreto. Existencia y unicidad.</p> <p>1.2. Estimación del error de discretización. Formulación</p> | <p>El alumno aplica el método de las diferencias finitas para resolver problemas de advección difusión y transporte en una dimensión y de difusión en dos dimensiones con condiciones de borde.</p> | <p>Smarskii LeVeque 2007 Allaire</p> |

| | | |
|--|--|--|
| <p>variacional del esquema continuo. Lema de Lax-Milgram en una dimensión. Error de consistencia. Teorema de estimación del error.</p> <p>2.- Problema modelo: $u_t - cux = 0$ transporte puro.</p> <p>2.1. Esquema de diferencias finitas.</p> <p>2.2. Consistencia y error de aproximación.</p> <p>2.3. Estabilidad y teorema de convergencia.</p> <p>3.- Problema modelo: $-\Delta u = f$ difusión bidimensional con condiciones de borde Dirichlet.</p> <p>3.1. Discretización por diferencias finitas.</p> <p>3.2. Existencia y unicidad de la aproximación numérica. Convergencia.</p> | | |
|--|--|--|

| Número | Nombre de la Unidad | Duración en Semanas | |
|--|--------------------------------------|---|--|
| 2 | Problemas Variacionales y modelación | 2 | |
| Contenidos | | Resultados de Aprendizajes de la Unidad | Referencias a la Bibliografía |
| <p>1.- Problemas variacionales Conducción, elasticidad, fluidos, ondas.</p> <p>2.- Espacios de Sobolev. Inyecciones, desigualdades, fórmulas de Green y teoremas de traza en dominios con borde.</p> | | El alumno deduce las formulaciones variacionales de varios modelos importantes en las aplicaciones en ciencias e ingeniería, así como las técnicas necesarias para analizarlas. | <p>Dautray-Lions</p> <p>Girault-Raviart</p> <p>Temam</p> <p>Allaire</p> <p>Necas</p> <p>Brézis</p> <p>Raviart-Thomas</p> |

| Número | Nombre de la Unidad | Duración en Semanas | |
|--|-----------------------------|--|----------------------------------|
| 3 | Método de Elementos Finitos | 5 | |
| Contenidos | | Resultados de Aprendizajes de la Unidad | Referencias a la Bibliografía |
| 1.- Problema modelo $-\text{div}(\gamma(x)\nabla u) = f$ difusión no homogénea con | | El alumno aplica el método de los elementos finitos aplicado a | <p>Ciarlet</p> <p>Zienkewich</p> |

| | | |
|--|--|---|
| <p>condiciones de borde Dirichlet.</p> <p>1.1. Elementos básicos de la teoría: aproximación de Galerkin, noción de aproximación conforme. Error de aproximación, error de discretización y Lema de Céa.</p> <p>1.2. Noción de triangulación, de subespacio aproximante y de elemento finito unisolvente.</p> <p>1.3. Ejemplos de Elementos Finitos del tipo Lagrange: d-simplex (triángulos o tetrahedros). Coordenadas baricéntricas. Operador de interpolación local. Teorema de unisolvencia de Nicolaides.</p> <p>1.4. Noción de Elementos Finitos afines equivalentes y ensamblaje de tales familias. Diámetro y redondez del Elemento Finito. Mallas regulares. Operador de interpolación global.</p> <p>2.- Convergencia del método de elementos finitos.</p> <p>2.1. Generalidades sobre los resultados de convergencia o Lema de Cea.</p> <p>2.2. Lema de Deny Lions: estimación del error de interpolación por operadores invariantes en espacios de polinomios.</p> <p>2.3. Aplicaciones al caso de aproximación por elementos finitos en dominios poligonales. Teorema de estimaciones del error del método en H^k, $k \geq 1$.</p> <p>2.4. Lema de Aubin-Nitsche o método de dualidad. Estimación del error del método en L^2.</p> | <p>problemas de difusión o conducción en 2 o 3 dimensiones con diversas condiciones de borde. El alumno comprende la teoría que sustenta el método y la convergencia de las soluciones discretas a la solución continua.</p> | <p>Allaire Babuska-Aziz Kirsek Bernardi Brennet Bramble- Hilbert Raviart- Thomas Solin</p> |
|--|--|---|

| Número | Nombre de la Unidad | Duración en Semanas | |
|--|-----------------------------|---|---|
| 4 | Método de Volúmenes Finitos | 3 | |
| Contenidos | | Resultados de Aprendizajes de la Unidad | Referencias a la Bibliografía |
| <p>1.- Preliminares. Mallas, espacio discreto y problema discreto.</p> <p>1.1. Un problema modelo elíptico en forma de divergencia. Formulación variacional.</p> <p>1.2. Mallas de Volúmenes Finitos admisibles.</p> <p>1.3. Espacio discreto y norma H^1 discreta. Desigualdad de Poncaré discreta.</p> <p>1.4. Discretización del problema continuo. Flujos y transporte discretos. Valor aguas arriba.</p> <p>2.- Unicidad, convergencia y estimaciones del error del método de volúmenes finitos.</p> <p>2.1. Principio del máximo discreto y unicidad del método.</p> <p>2.2 Estimaciones a priori. Caso Dirichlet homogéneo.</p> <p>2.3 Teorema de compacidad de Kolmogorov. Lema de convergencia. Teorema de convergencia del método en L^2 en el caso Dirichlet homogéneo.</p> <p>2.4 Teorema de convergencia en L^2 en el caso Dirichlet no homogéneo.</p> <p>2.5 Estimaciones del error del método.</p> | | <p>El alumno aplica el método de los volúmenes finitos aplicado a problemas de difusión o conducción en 2 dimensiones con diversas condiciones de borde. El alumno comprende la teoría que sustenta el método y la convergencia de las soluciones discretas a la solución continua.</p> | <p>Cai Eymard LeVeque 2004 Quarteroni</p> |

| Número | Nombre de la Unidad | Duración en Semanas | |
|------------|---|---|-------------------------------|
| 5 | Temas de conducción, elasticidad, fluidos y ondas | 1 | |
| Contenidos | | Resultados de Aprendizajes de la Unidad | Referencias a la Bibliografía |
| | | | |

| | | |
|--|---|--------------------------|
| Problemas de controlabilidad Problemas de observabilidad Problemas inversos Problemas espectrales | El alumno conoce distintos campos de aplicación del análisis numérico de EDP. | Quarteroni-Valli y otros |
|--|---|--------------------------|

Laboratorios

| Número | Tema del Laboratorio | Semana |
|--|---|--|
| Lab 0 | Introducción. | 1 |
| Contenidos | Resultados de Aprendizajes de la Unidad | Referencias a la Bibliografía |
| <ul style="list-style-type: none"> Parte A. Comandos básicos y cálculo vectorial. Parte B. Funciones vectoriales. Parte C. Gráficos 1d, 2d y 3d. Parte D. Aplicaciones (ver bibliografía). | El objetivo de esta primera sesión es que el alumno se familiarice con el software matlab. Si el alumno está ya familiarizado con él, los primeros ejercicios debieran ser fáciles y se puede avanzar a los siguientes de mayor complejidad. Si no está familiarizado, debe realizarlos desde el comienzo y leer el pequeño resumen de comandos matlab. | Se recomienda revisar el libro de Moler, C. (disponible en web), en particular el Capítulo 2 sobre ecuaciones lineales y el ejemplo final de PageRank de Google. |

| Número | Tema del Laboratorio | Semana |
|---|---|-------------------------------|
| Lab 1 | Método de Diferencias Finitas | 2 |
| Contenidos | Resultados de Aprendizajes de la Unidad | Referencias a la Bibliografía |
| <ul style="list-style-type: none"> Parte A. Discretización del Problema. Parte B. Resolución del Sistema Lineal Parte C. Convergencia Parte D. Otras condiciones de borde | El objetivo de esta sesión es introducir al alumno al método de diferencias finitas mediante un problema sencillo en una dimensión. | Frey, P. |

| Número | Tema del Laboratorio | Semana |
|--|--|-------------------------------|
| Lab 2 | Método de las Diferencias Finitas, Dominio Perforado | 4 |
| Contenidos | Resultados de Aprendizajes de la Unidad | Referencias a la Bibliografía |
| <ul style="list-style-type: none"> Parte A. Estudio de la | El objetivo de esta sesión es | Frey, P. |

| | | |
|--|--|--|
| ecuación de Poisson <ul style="list-style-type: none"> • Parte B. Aproximación por Diferencias Finitas. • Parte C: estudio de dominios curvos. | aprender a resolver EDP's en 2 dimensiones mediante el Método de las Diferencias Finitas. Se resolverá la ecuación de Poisson en un rectángulo unitario y en un dominio perforado ; además se estudiará la aproximación para condiciones de borde en dominios con curvatura. | |
|--|--|--|

| Número | Tema del Laboratorio | Semana |
|--|---|--|
| Lab 3 | Método de las Diferencias Finitas, Condición CFL | 5 |
| Contenidos | Resultados de Aprendizajes de la Unidad | Referencias a la Bibliografía |
| <ul style="list-style-type: none"> • Parte A: Ecuación de Transporte y Difusión • Parte B: Diferencias finitas y sistema lineal. • Parte C: difusión numérica • Parte D: condición CFL | En la presente sesión de laboratorio se pretende que el alumno estude una ecuación de transporte y difusión de evolución mediante el método de las diferencias Finitas, y aplicar los conceptos de difusión numérica y condición CFL. | Frey, P. Para una aplicación en ciencias atmosféricas se recomienda ver Jacobson, M. Cap 5. |

| Número | Tema del Laboratorio | Semana |
|---|---|---------------------------------|
| Lab 4 | Método de los Elementos Finitos, Problema Estacionario | 7 |
| Contenidos | Resultados de Aprendizajes de la Unidad | Referencias a la Bibliografía |
| Parte 1 : Problema estacionario <ul style="list-style-type: none"> • Parte A: formulación variacional. • Parte B: discretización por elementos finitos. • Parte C: sistema lineal y solución numérica. | En el presente laboratorio se pretende que el alumno estude y discretice una ecuación de transporte y difusión mediante el método de elementos finitos en el caso estacionario. | Ciarlet, P. Zienkewich, O.C. |

| Número | Tema del Laboratorio | Semana |
|-------------------------------------|---|-------------------------------|
| Lab 5 | Método de los Elementos Finitos, CB Mixtas y Problema de Evolución. | 8 |
| Contenidos | Resultados de Aprendizajes de la Unidad | Referencias a la Bibliografía |
| Parte 2 : Problema estacionario con | En el presente laboratorio se | Ciarlet, P. |

| | | |
|--|--|------------------|
| condiciones de borde mixtas <ul style="list-style-type: none"> • Parte A: formulación variacional. • Parte B: discretización por elementos finitos. • Parte C: sistema lineal y solución numérica. Parte 3 : Problema de evolución <ul style="list-style-type: none"> • Parte A: solución analítica aproximada. • Parte B: Estudio del esquema de Crank-Nicolson. | continúa el trabajo del laboratorio anterior y el alumno se ve enfrentado primero a cambios en las condiciones de borde y luego a la resolución del problema de evolución original utilizando el método de elementos finitos en espacio y diferencias finitas en tiempo. | Zienkewich, O.C. |
|--|--|------------------|

| Número | Tema del Laboratorio | Semana |
|---|--|---------------------------------|
| Lab 6 | Método de los Elementos Finitos 2D/Volúmenes Finitos | 10 |
| Contenidos | Resultados de Aprendizajes de la Unidad | Referencias a la Bibliografía |
| <ul style="list-style-type: none"> • Parte 1 : Descripción del paquete de programas básico • Parte 2 : Formulación Teórica del Problema • Parte 3 : resolución numérica y aplicación a un problema inverso <p>*También es posible reemplazar este laboratorio por uno de volúmenes finitos en una malla hexagonal.</p> | El alumno aprende a usar el método de los elementos finitos para resolver el problema en malla no estructurada con rutinas MATLAB. Se utilizarán 2-simplex de tipo 1. Para ello se proveen las rutinas que resuelven el problema $\Delta u + u = f$ con condiciones de borde tipo Dirichlet o Neumann homogéneas, en un dominio correspondiente a un cuarto de un círculo. | Ciarlet, P. Zienkewich, O.C. |

| Número | Tema del Laboratorio | Semanas |
|--|---|--|
| Proyectos | Temas varios | 12,13,14 |
| Contenidos | Resultados de Aprendizajes de la Unidad | Referencias a la Bibliografía |
| Al inicio del semestre se presentan a los alumnos los proyectos disponibles. Se les pide a los alumnos que seleccionen uno que se ajuste más a sus intereses a inicios hasta mediados de semestre. Los proyectos se pueden | Se espera que el alumno desarrolle con su grupo un proyecto numérico el que deberá presentar en un primer avance a mediados | Ciarlet, P. Frey, P. Girault, G.; Raviart, P.-A. Temam, R. |

| | | |
|---|---|-------------------------|
| <p>realizar en grupos pequeños. Ejemplos de temas de proyectos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ecuación de flujo de la curvatura media y conjuntos de nivel • Ecuación del calor no lineal • El problema de Stokes • Un problema de ondas de superficie libre • Un problema de transmisión • Un problema de elasticidad • Generación de patrones | <p>de semestre y luego en una presentación final con los resultados obtenidos. El alumno a través del proyecto aplicará los conocimientos teóricos y numéricos aprendidos a un problema de mayor complejidad.</p> | <p>Zienkewich, O.C.</p> |
|---|---|-------------------------|

| Bibliografía |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • G. Allaire, Analyse numérique et optimisation, Editions de l'Ecole Polytechnique, Paris, 2006. • I. Babuska, A. K. Aziz, Foundations of the finite element method. In A. K. Aziz, editor, The Mathematics Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, 3(362), Academic Press, New York, 1972. • C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti, Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques, Mathématiques et Applications, vol. 45, Springer, Paris, 2004. • J.-H. Bramble, S.-R. Hilbert, Estimations of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transform and spline interpolation, SIAM J. Numer. Anal., 25(6), 1237-1271, 1970. • S. Brenner, L.-R. Scott, The mathematical theory of finite element method, Springer, 2000. • H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Masson, 1983. • A. Ern, J.-L. Guermond, Theory and practice of Finite Elements, Applied Mathematical Series, vol. 159, Springer, New York, 2004. • Z. Cai, On the finite volume element method, Numer. Math. 58, 713-735, 1991. • P.-G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North Holland, Amsterdam, 1978. • R. Dautray, J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, Tomos 3, 4, Masson, 1987. • R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin, The Finite Volume Method, Handbook for Numerical Analysis, Ph. Ciarlet J.L. Lions eds, North Holland, 2000, 715-1022. • V. Girault, P.-A. Raviart, Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations: Theory and Algorithms, Springer, New York, 1986. • M. Kirzek, P. Neittaanmaki, Finite element approximation of Variational Problems and Applications, London, Longman, 1990. • R.J. LeVeque, Finite difference methods for ordinary and partial differential equations, SIAM, Philadelphia, 2007. • R.J. LeVeque, Finite Volume Methods For Hyperbolic Problems, Cambridge University |

Press, Cambridge, 2004.

- J. Necas, Les méthodes directes dans la théorie des équations elliptiques, Academia, Prague, 1967.
- A. Quarteroni and A. Valli, Numerical approximation of partial differential equations, Springer Series in Computational Mathematics, 23, Springer, 1997.
- P.-A. Raviart, J.-M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, 1998.
- A. A. Samarskii, The theory of difference schemes, Marcel Dekker Inc, New York, 2001.
- P. Solin, Partial differential equations and the finite element method, Wiley-Interscience, 2005.
- A. Tveito and R. Winther, Introduction to partial differential equations: a computational approach, Texts in Applied Mathematics, 29, Springer, 1998.
- R. Temam, Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis, 2nd ed, AMS Chelsea Publishing, Providence, 2001.
- O. C. Zienkewich and R.L. Taylor, The finite element method for solid and structural mechanics. 6th ed. Elsevier, Amsterdam, 2005.
- P. Frey. Numerical Analysis of PDEs, notes du cours.
<http://www.ann.jussieu.fr/frey/m5105.html>
- Cleve V. Moler, Numerical computing with matlab, SIAM, Philadelphia, 2004.
Disponible en web: <http://www.mathworks.com/moler/chapters.html>
- Mark Z. Jacobson, Fundamentals of Atmospheric Modeling. 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

| | |
|-----------------|-----------------|
| Vigencia desde: | 2014 |
| Elaborado por: | Axel Osses-2015 |
| Revisado por: | |