

**PROGRAMA DE CURSO**  
**CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES**

**A. Antecedentes generales del curso:**

Departamento	Ingeniería Matemática					
Nombre del curso	Cálculo en Varias Variables					
Nombre del curso en inglés	Multivariate Calculus					
Código	MA2001		Créditos	6		
Horas semanales	Docencia	3	Auxiliares	2	Trabajo personal	5
Carácter del curso	Obligatorio	X		Electivo	-----	
Requisitos	MA1002 Cálculo Diferencial e Integral MA1102 Álgebra Lineal					

**B. Propósito del curso:**

El propósito de este curso es proporcionar los conocimientos fundamentales del cálculo en varias variables reales. Se espera que el estudiante asimile los conceptos de sucesiones, límites, continuidad, derivadas e integrales en varias variables. Además, se espera que el estudiante pueda usar estos conceptos para estudiar el comportamiento de funciones en varias variables y aplicarlos, por un lado, a problemas de modelamiento en los que se deba buscar máximos y mínimos, como una primera aproximación al posterior curso de Optimización, y por otro para el cálculo de volúmenes, masas y momentos de inercia que son fundamentales para la resolución de problemas en ingeniería.

Se espera además que el estudiante actúe en las actividades que se le proponen de manera responsable y honesta, evitando por ejemplo el plagio, copia de sus pares u otras fuentes, así como cualquier comportamiento que vaya en contra de sus pares, equipo docente o código de ética y reglamentos de la Escuela de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.

El curso tributa a las siguientes competencias específicas (CE) y genéricas (CG) del Plan de Formación Intermedia (Plan Común):

CE3: Interpretar y utilizar el lenguaje formal matemático, logrando identificar hipótesis, conclusiones, tautologías e inconsistencias, para comprender y desarrollar argumentaciones lógicas.

CE4: Desarrollar la abstracción matemática, es decir, reconocer, separar, jerarquizar y analizar información relevante para utilizarla en la resolución matemática de problemas y plantear problemas de diferentes áreas en situaciones simples.

CG1: Comunicación Académica y Profesional. Leer de forma comprensiva y analítica diferentes tipos de textos pertinentes para su formación en el nivel. Asimismo, expresar de manera eficaz, clara, precisa e informada sus ideas basadas en evidencia, opiniones e indagaciones, en situaciones formales, tanto en modalidad oral como escrita.

En el curso esta competencia será evaluada de modo general cuyo detalle se describe en el apartado de "Estrategia de Evaluación" y no en base a resultados de aprendizaje.

### C. Resultados de aprendizaje:

Competencias específicas	Resultados de aprendizaje
CE3, CE4	<b>RA1:</b> Realiza demostraciones formales sobre límites de sucesiones y continuidad de funciones de varias variables, logrando reconocer y manejar sus propiedades y los principales teoremas involucrados.
CE3, CE4	<b>RA2:</b> Realiza demostraciones formales sobre la diferenciabilidad de funciones de varias variables, logrando manejar sus propiedades y principales teoremas
CE3, CE4	<b>RA3:</b> Aplica los teoremas de derivación de funciones inversas e implícitas al cálculo de diferenciales.
CE3, CE4	<b>RA4:</b> Aplica reglas de cálculo y desarrolla destrezas operacionales para encontrar derivadas de funciones de varias variables, logrando utilizarlas para analizar el comportamiento de funciones y resolver problemas de optimización con y sin restricciones
CE3, CE4	<b>RA5:</b> Comprende el concepto de integral de Riemann de funciones de múltiples variables. Calcula, integrales dobles y triples usando teoremas de Fubini y cambio de variables.
CE3, CE4	<b>RA6:</b> Aplica el concepto de integral múltiple al cálculo de volúmenes, masas y momentos de inercia, entre otras aplicaciones para la ingeniería y ciencias.
CE3, CE4	<b>RA7:</b> Parametriza superficies y calcula integrales de funciones escalares sobre superficie.

**D. Unidades temáticas:**

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
1	RA1	Topología en $\mathbb{R}^n$	1.5 semanas
Contenidos		Indicador de logro	
1.1. Distancias y normas. Equivalencia de normas. Bolas abiertas y cerradas. 1.2. Sucesiones en $\mathbb{R}^n$ : convergencia, sucesión de Cauchy, subsucesión y punto de acumulación. 1.3. Conjuntos abiertos. Conjuntos cerrados. Conjuntos compactos.		El estudiante: 1. Reconoce normas en $\mathbb{R}^n$ . 2. Calcula límites de sucesiones. 3. Determina si un conjunto dado es abierto, cerrado o compacto. 4. Desarrolla una noción básica de la Topología de $\mathbb{R}^n$	
Bibliografía de la unidad		[1]	

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
2	RA1	Funciones de varias variables. Límites y Continuidad.	1 semana
Contenidos		Indicador de logro	
2.1. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ . Grafos y conjuntos de nivel. 2.2. Límite y continuidad de una función de varias variables. Álgebra de límites y funciones continuas. 2.3. Propiedades de funciones continuas sobre conjuntos compactos.		El estudiante: 1. Grafica funciones simples de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y sus conjuntos de nivel. 2. Determina la continuidad de funciones de varias variables.	
Bibliografía de la unidad		[1]	

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
3	RA2	Cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$	2 semanas
Contenidos		Indicador de logro	
3.1. Derivadas direccionales y parciales. 3.2. Definición de derivada fuerte según Fréchet. Matriz Jacobiana. 3.3. Existencia y continuidad de derivadas parciales como		El estudiante: 1. Calcula derivadas parciales. 2. Determina diferenciabilidad de una función. 3. Utiliza la regla de la cadena. 4. Calcula planos tangentes y direcciones de máximo ascenso y descenso.	

<p>condición suficiente para diferenciabilidad de una función.</p> <p>3.4. Regla de la cadena.</p> <p>3.5. Aproximación de primer orden y plano tangente.</p> <p>3.6. Gradiente. Dirección de máximo ascenso y descenso. Vector normal a una curva o superficie de nivel.</p> <p>3.7. Teorema de los incrementos finitos.</p>	<p>5. Aplica el teorema de los incrementos finitos.</p>
Bibliografía de la unidad	[1]

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
4	RA3	Teoremas de la función inversa e implícita	1.5 semanas
<b>Contenidos</b>		<b>Indicador de logro</b>	
<p>4.1. Teorema de la función inversa</p> <p>4.2. Teorema de la función implícita.</p> <p>4.3. Teorema del punto fijo.</p>		<p>El estudiante:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Enuncia los teoremas de la función inversa e implícita y los aplica al cálculo de diferenciales.</li> <li>2. Reconoce al teorema del punto fijo como técnica para demostrar existencia de soluciones en sistemas de ecuaciones no lineales.</li> </ol>	
Bibliografía de la unidad		[1]	

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
5	RA4	Derivadas de orden superior	1 semana
<b>Contenidos</b>		<b>Indicador de logro</b>	
<p>1.1. Definiciones y teorema de Schwartz.</p> <p>1.2. Matriz Hessiana. Teorema de Taylor de 1er y 2do orden.</p>		<p>El estudiante:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calcula aproximaciones de 1er y 2do orden para funciones de varias variables.</li> </ol>	
Bibliografía de la unidad		[1]	

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
6	RA4	Máximos y mínimos de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$	1.5 semanas
Contenidos		Indicador de logro	
6.1. Máximos y mínimos locales. Puntos críticos. 6.2. Condiciones necesarias y suficientes de segundo orden. Puntos tipo silla. 6.3. Funciones convexas. 6.4. Multiplicadores de Lagrange.		El estudiante:  1. Encuentra puntos críticos y determina si corresponden a máximos o mínimos locales. 2. Aplica condiciones de segundo orden para determinar la convexidad de una función. 3. Calcula mínimos o máximos con restricciones.	
Bibliografía de la unidad		[1]	

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
7	RA5	Integral de Riemann en $\mathbb{R}^n$	2 semanas
Contenidos		Indicador de logro	
7.1. Integral de Riemann en rectángulos mediante particiones. Propiedades básicas. 7.2. Relación entre la continuidad y el dominio de una función, y su integrabilidad.		El estudiante:  1. Comprende la noción de función Riemann-integrable. 2. Conoce que toda función continua en un rectángulo es Riemann-integrable. 3. Conoce que toda función continua definida en un rectángulo menos el grafo de otra función continua es Riemann-integrable.	
Bibliografía de la unidad		[1]	

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
8	RA5, RA6	Teorema de Fubini, cambio de variables y aplicaciones	3 semanas
Contenidos		Indicador de logro	
9.1. Teorema de Fubini. Integración sobre dominios generales no rectangulares. 9.2. Teorema del cambio de variables. 9.3. Integración en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas. 9.4. Aplicaciones: centro de masa, momentos de inercia.		El estudiante:  1. Calcula integrales de Riemann mediante integrales iteradas. 2. Calcula integrales iteradas intercambiando los diferenciales. 3. Aplica el teorema de cambio de variables. 4. Calcula centros de masa y momentos de inercia.	
Bibliografía de la unidad		[1]	

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
9	RA7	Parametrización e integración en superficies	1.5 semanas
Contenidos		Indicador de logro	
9.1. Descripción de técnicas para parametrizar superficies. Parametrizaciones equivalentes. 9.2. Vectores tangentes, plano normal y recta normal a una superficie. 9.3. Integración de funciones escalares sobre una superficie.		El estudiante: 1. Parametriza superficies. 2. Calcula los vectores tangentes y plano tangente. 3. Calcula integrales de funciones escalares sobre superficie.	
Bibliografía de la unidad		[1]	

#### D. Estrategias de enseñanza:

La estrategia de enseñanza utilizada es principalmente expositiva con participación de los estudiantes; la participación va desde responder preguntas teóricas realizadas por el docente hasta preguntas prácticas durante la resolución de ejercicios. Además, se utiliza como actividad en clases la resolución de problemas, que dependiendo del semestre y el profesor se realizan en la clase de cátedra, en las auxiliares o en el trabajo que se les plantea a los estudiantes. Para el logro del aprendizaje el estudiante cuenta con distintos materiales de apoyo entregado por la escuela y el departamento, como material bibliográfico, distintos apuntes, material audiovisual, tutorías y apoyo en el estudio, entre otros. El curso contempla cinco horas de trabajo autónomo semanal.

#### E. Estrategias de evaluación:

El curso contempla distintas instancias de evaluación de proceso.

- Evaluaciones parciales (controles, tareas, trabajo en clases, entre otros). Con un máximo de 3 controles por semestre.
- Examen final.

La ponderación de cada evaluación respetará siempre los reglamentos de la Escuela. En cada

uno de estos controles y examen final se evaluará la capacidad del estudiante para escribir proposiciones abstractas de manera clara y precisa. Esta evaluación se realiza de manera integral en la revisión de las evaluaciones y puede afectar un porcentaje de la calificación de cada una de ellas (como ejemplo, entre 1 y 5%).

#### F. Recursos bibliográficos:

##### **Bibliografía General:**

- (1) T. Apostol, Calculus Vol II, Reverté 1967.
- (2) C. Buck, Advanced Calculus, Mc Graw-Hill 1965.
- (3) H. Cartan, Cálculo Diferencial. Omega 1972.
- (4) W. Fleming, Funciones de Varias Variables, CECSA 1969.
- (5) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba, Cálculo Vectorial 5ta Edición

#### G. Datos generales sobre elaboración y vigencia del programa de curso:

Vigencia desde:	2020
Elaborado por:	José Soto (DIM), Natacha Astromujof (DIM)
Validado por:	José Soto. CTD DIM.
Revisado por:	Área de Gestión Curricular, SGD