MA774 OPTIMIZACION Y SISTEMAS DINAMICOS

NÚMERO DE UD: 10

DISTRIBUCIÓN HORARIA:
3.0 hrs. de clases
7.0 hrs. de trabajo personal

REQUISITOS: Cálculo Diferencial y Análisis Funcional.

OBJETIVOS: Presentar los elementos básicos de la teoría clásica de sistemas dinámicos disipativos de tipo gradiente en optimización convexa, y algunos resultados más recientes de su acoplamiento con métodos de penalización y técnicas de regularización paramétrica para problemas de optimización con restricciones.

PROGRAMA:

1. **Método de máximo descenso: caso diferenciable**

   - Recuerdo de cálculo diferencial: teorema de existencia de Cauchy-Lipschitz-Picard en espacios de Banach, caso localmente lipschitziano, intervalo de existencia maximal, lema de Gronwall.
   - Flujo de gradiente continuo en espacios de Hilbert: interpretación geométrica, existencia global y propiedades asintóticas generales para gradiente localmente lipschitziano.
   - Caso convexo: convergencia asintótica en dimensión finita.
   - Caso analítico real: el teorema de Lojasewicz.

2. **Método de máximo descenso: caso convexo no diferenciable**

   - Elementos de análisis convexo: subdiferencial, transformada de Fenchel,inf-convolución, operadores monótonos maximales, regularizada de Moreau-Yosida.
   - Inclusión diferencial de máximo descenso es espacios de Hilbert: teorema de existencia global de Brézis.
   - Comportamiento asintótico: teorema de convergencia débil de Brück. Resultados de convergencia fuerte de Brück y Brézis. Lectura opcional: contraejemplo de Baillon.

3. **Métodos de penalización en programación convexa**

   - Teoría de la dualidad de Fenchel-Rockafellar vía funciones de perturbación.
   - Métodos de penalización: existencia y caracterización de soluciones aproximadas ("central path") primales-duales.

- Medias no lineales y resultados de selección asintótica: centros analíticos y minimización jerárquica.
- Acoplamiento con el método de máximo descenso. Convergencia asintótica para: (a) parametrizaciones lenta y rápida; y (b) parametrización cualquiera para el caso de métodos de penalización.

4. **El algoritmo de punto proximal**

   - Definición, propiedades básicas y convergencia asintótica: caso autónomo para operadores monótonos maximales y subdiferenciales.
   - Prox inexacto y métodos explícitos de tipo gradiente con búsqueda lineal.
   - Acoplamiento del método Prox con penalización: prox diagonal.

5. **Métodos de tipo gradiente con métrica variable**

   - Métricas Riemannianas en $\mathbb{R}^n$ y sistema dinámico de tipo gradiente asociado. Algunos ejemplos (Newton, quasi-Newton, Lotka-Volterra,...).
   - Métricas de tipo Hessiano y funcional de Liapunov asociado.
   - Convergencia asintótica.
   - Extensiones al caso discreto.
   - Acoplamiento con métodos de penalización y regularización paramétrica.

6. **Oscillador amortiguado y método prox inercial**

   - Resultados generales en el caso diferenciable. Convergencia asintótica en el caso convexo.
   - Teorema de existencia global de Schatzman en el caso convexo no diferenciable. Aplicación a la dinámica de choques.
   - Discretización implícita: el método prox inercial.

BIBLIOGRAFIA GENERAL

1. H. Brézis, "Opérateurs Maximaux Monotones", North-Holland Math. Stud. 5, North-Holland, Amsterdam, 1973.

2. R.E. Brück, Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space, *Journal of Functional Analysis*, 18 (1975), pp. 15-26.

3. A. Cauchy, Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées, *C.R.A.S.*, 25 (1847), pp. 535-538.

4. J.E. Dennis and R.B. Schnabel, "Numerical Methdos for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations", Prentice-Hall, NJ, 1983.

5. U. Helmke and J.B. Moore, "Optimization and Dynamical Systems", Springer-Verlag, London, 1994.

6. B. Martinet, *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations succesives*, RAIRO Rech. Opér., 4 (1970), pp. 154-158.

7. J. Nocedal and S.J. Wright, "Numerical Optimization", Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag, New York, 1999.

8. Z. Opial, Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73 (1967), pp. 591-597.

9. J. Palis and W. De Melo, "Geometric theory of dynamical systems", Springer, 1982.

10. R.T. Rockafellar, "Convex Analysis", Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

11. R.T. Rockafellar, "Conjugate Duality and Optimization", Conference Board of Mathematical Sciences Series 16, SIAM Publications, Philadelphia, 1974.

12. R.T. Rockafellar, "Monotone operators and the proximal point algorithm", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 14 (1976), pp. 877-898.

13. A. Tikhonov and V. Arsenine, "Méthodes de résolution de problèmes mal posés", MIR, Moscow, 1974.

ARTÍCULOS

1. F. Alvarez, Absolute minimizer in convex programming by exponential penalty, *Journal of Convex Analysis* Vol. 7, No. 1 (2000), pp. 197-202.

2. F. Alvarez, J. Bolte and O. Brahic, Hessian-Riemannian gradient flows in convex programming. To appear in SIAM J. on Control (2004).

3. F. Alvarez and R. Cominetti, Primal and dual convergence of a proximal point exponential penalty method for linear programming, *Math. Program.* 93 (2002), no. 1, Ser. A, pp. 87-96.

4. H. Attouch, Viscosity solutions of minimization problems, *SIAM Journal on Optimization*, 6 (1996), pp. 769-806.

5. H. Attouch and R. Cominetti, A dynamical approach to convex minimization coupling approximation with the steepest descent method, *Journal of Differential Equations*, 128 (1996), pp. 519-540.

6. A. Auslender, R. Cominetti and M. Haddou, Asymptotic analysis for penalty and barrier methods in convex and linear programming, Mathematics of Operations Research 22, no. 1 (1997), pp. 43–62.

7. J.B. Baillon, Un exemple concernant le comportement asymptotique de la solution du problème $du/dt+\partial\Phi(u) = 0$, *Journal of Functional Analysis*, 28 (1978), pp. 369-376.

8. J.B. Baillon and R. Cominetti, A convergence result for non-autonomous subgradient evolution equations and its application to the steepest descent exponential penalty trajectory in linear programming, Journal of Functional Analysis.

9. H. Bauschke, J.M. Borwein, P. Combettes, Bregman monotone optimization algorithms, *SIAM J. Control Optim.*, 42 (2003), no. 2, pp. 596-636.

10. J. Bolte and M. Teboulle, Barrier operators and associated gradient-like dynamical systems for constrained minimization problems, *SIAM Control Opt.*, Vol 42.

11. L.M. Bregman, The relaxation method for finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz., 7 (1967), pp. 620-631 (in Russian).* English transl. in U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys., 7 (1967), pp. 200-217.

12. R. Cominetti, Nonlinear averages and convergence of penalty trajectories in convex programming, Proceeding of the Workshop on Ill–posed Variational Problems and Regularization Techniques Trier, 1998, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 477 (1999), Springer-Verlag, pp. 65-78.

13. R. Cominetti and M. Courdurier, Coupling general penalty schemes for convex programming with the steepest descent and the proximal point algorithm, *SIAM J. Optim.* 13 (2002), no. 3, pp. 745-765.

14. G. Chen and M. Teboulle, Convergence analysis of a proximal-like optimization algorithm using Bregman functions, *SIAM J. Optim.*, 3 (1993), pp. 538-543.

15. Lemaire, B., An Asymptotical Variational Principle Associated with the Steepest Descent Method for a Convex Function, *Journal of Convex Analysis*, Vol. 3, pp. 63-70, 1996.