

PROGRAMA DE CURSO

ANÁLISIS NUMÉRICO DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES, TEORÍA Y LABORATORIO

A. Antecedentes generales del curso:

Departamento	DIM					
Nombre del curso	Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales, Teoría y Laboratorio	Código	MA5307	Créditos	9	
Nombre del curso en inglés	<i>Numerical Analysis in Partial Differential Equations, Theory and Practice</i>					
Horas semanales	Docencia	3	Auxiliares	2	Trabajo personal	10
Carácter del curso	Obligatorio	X		Electivo		
Requisitos	MA4802: Ecuaciones en Derivadas Parciales, AUTOR					

B. Propósito del curso:

El/la alumno/a aprende la teoría y práctica de los métodos fundamentales de resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales, a saber, los métodos de: diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos.

Asimismo, el/la alumno/a aplica las diferencias finitas a la resolución de problemas de difusión y transporte unidimensionales, los elementos finitos para estudiar en detalle la resolución de problemas elípticos de segundo orden y los volúmenes finitos a problemas elípticos de segundo orden escritos en forma de divergencia.

El/la alumno/a desarrolla capacidades de cálculo científico mediante la implementación práctica de estos tres métodos a través de laboratorios computacionales y del desarrollo de un proyecto semestral en un ámbito más aplicado y de mayor complejidad.

El curso tributa a las siguientes competencias específicas (CE):

CE1: Interpretar y utilizar el lenguaje formal matemático, para analizar y verificar la veracidad de afirmaciones matemáticas.

CE2: Calcular y manipular objetos matemáticos y herramientas conceptuales de diversas áreas de las matemáticas, tales como análisis, simulación numérica, ecuaciones diferenciales, matemáticas discretas, optimización, probabilidades y estadísticas, entre otras, para la resolución de problemas.

CE3: Modelar matemáticamente problemas de diferentes áreas en situaciones simples, es decir, traducir la realidad a una estructura matemática de forma tal que se facilite su análisis.

CE4: Generar y divulgar conocimiento en algunas de las distintas ciencias exactas y naturales, tales como matemáticas, física y biología.

CE5: Concebir, diseñar y evaluar desarrollos científico-tecnológicos para resolver problemas en el ámbito de las ciencias de la ingeniería.

El curso tributa a las siguientes competencias genéricas (CG):

CG1: Comunicación académica y profesional

Comunicar en español de forma estratégica, clara y eficaz, tanto en modalidad oral como escrita, puntos de vista, propuestas de proyectos y resultados de investigación fundamentados, en situaciones de comunicación compleja, en ambientes sociales, académicos y profesionales.

CG3: Compromiso ético

Actuar de manera responsable y honesta, dando cuenta en forma crítica de sus propias acciones y sus consecuencias, en el marco del respeto hacia la dignidad de las personas y el cuidado del medio social, cultural y natural.

CG4: Trabajo en equipo

Trabajar en equipo, de forma estratégica y colaborativa, en diversas actividades formativas, a partir de la autogestión de sí mismo y de la relación con el otro, interactuando con los demás en diversos roles: de líder, colaborador u otros, según requerimientos u objetivos del trabajo, sin discriminar por género u otra razón.

CG5: Sustentabilidad

Concebir y aplicar nuevas estrategias de solución a problemas de ingeniería y ciencias en el marco del desarrollo sostenible, considerando la finitud de recursos, la interacción entre diferentes actores sociales, ambientales y económicos, además de las regulaciones correspondientes.

C. Resultados de aprendizaje

Competencias específicas	Resultados de aprendizaje
CE1, CE2, CE4	RA1: Crea argumentos usando la teoría y práctica de los métodos fundamentales de resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales, a saber, los métodos de: diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos.
CE1, CE2, CE3	RA2: Aplica los tres métodos en ámbitos apropiados: las diferencias finitas en la resolución de problemas de difusión y transporte unidimensionales, los elementos finitos para estudiar en detalle la resolución de problemas elípticos de segundo orden y los volúmenes finitos a problemas elípticos de segundo orden escritos en forma de divergencia.
CE2, CE3, CE5, CG 5	RA3: Implementa computacionalmente los tres métodos a través de un proyecto semestral desarrollado en sesiones de laboratorio en temas aplicados que incluyan aspectos de desarrollo sostenible, tales como la finitud de recursos y la interacción de dos o más factores.
CG1	RA4: Argumenta por escrito, tanto en controles, exámenes o tareas asociadas, los resultados obtenidos en la solución de problemas, con especial cuidado en la claridad y precisión en el uso de los términos matemáticos.
CG3	RA5: Ejecuta las actividades programadas, cumpliendo con sus requerimientos, plazos y de manera honesta, en particular, sin plagiar trabajos en tareas o informes, ni copiar en evaluaciones.
CG4	RA6: Colabora en el cumplimiento de las actividades grupales programadas.

Por su naturaleza, los resultados de aprendizaje RA4 y RA5 son parte de cada una de las unidades y su validación se hará en las actividades de evaluación. Por su parte, el resultado de aprendizaje RA6 se valida en los trabajos asociados a los laboratorios.

D. Unidades temáticas:

Resumen de unidades temáticas

Unidad	Nombre de la unidad	Duración
1	Método de Diferencias Finitas	4.0
2	Problemas variacionales y modelación	2.0
3	Método de Elementos Finitos	5.0
4	Método de Volúmenes Finitos	3.0
5	Temas de conducción, elasticidad, fluidos y ondas	1.0
TOTAL		15

Laboratorios

Unidad	Tema del Laboratorio	Semana de realización
Lab 0	Introducción al uso de Matlab	1
Lab 1	Método de Diferencias Finitas	2
	Presentación Lab 1	3
Lab 2	Método de Diferencias finitas, dominio perforado	4
Lab 3	Método de Diferencias finitas, condición CFL	5
	Presentación Lab 2 y 3	6
Lab 4	Método de elementos finitos, problema estacionario.	7
Lab 5	Método de elementos finitos, CB mixtas y Problema de evolución	8
	Presentación Lab 4 y 5	9
Lab 6	Método de los Elementos Finitos 2D/Volúmenes Finitos	10
	Presentación Lab 6	11
Presentaciones proyecto final	Temas varios: flujo de la curvatura media y conjuntos de nivel, calor no lineal, problema de Stokes, ondas de superficie libre, problema de transmisión, formación de patrones, epidemiología, semiconductores, etc. (Aux+Lab)	12,13,14

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
1	RA1	Método de diferencias finitas	4 semanas
Contenidos		Indicador de logro	
<p>1.2. Introducción. Problema modelo: $-\Delta u + bu_x + cu = f$ advección difusión con condiciones de borde Dirichlet.</p> <p>1.1.1 Noción de esquema numérico. Principio del máximo discreto.</p> <p>1.1.2 Existencia y unicidad. Estimación del error de discretización.</p> <p>1.1.3 Formulación variacional del esquema continuo.</p> <p>1.1.4 Lema de Lax--- Milgram en una dimensión. Error de consistencia. Teorema de estimación del error.</p> <p>1.2. Problema modelo: $u_t - \Delta u = 0$ transporte puro.</p> <p>1.2.1 Esquema de diferencias finitas.</p> <p>1.2.2 Consistencia y error de aproximación.</p> <p>1.2.3 Estabilidad y teorema de convergencia.</p> <p>1.3- Problema modelo: $-\Delta u = f$ difusión bidimensional con condiciones de borde Dirichlet.</p> <p>1.3.1 Discretización por diferencias finitas.</p> <p>1.3.2 Existencia y unicidad de la aproximación numérica. Convergencia.</p>		<p>El/la estudiante:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Aplica el método de las diferencias finitas. 2. Resuelve problemas de advección difusión y transporte en una dimensión aplicando el método de las diferencias finitas. 3. Resuelve problemas de difusión en dos dimensiones con condiciones de borde aplicando el método de las diferencias finitas 	
Bibliografía de la unidad		[20], [15], [1]	

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
2	RA1, RA2, RA3	Problemas Variacionales y modelación	2 semana
Contenidos		Indicador de logro	
2.1. Problemas variacionales: Conducción, elasticidad, fluidos, ondas. 2.2. Espacios de Sobolev. Inyecciones, desigualdades, fórmulas de Green y teoremas de traza en dominios con borde.		El/la estudiante: 1. Explica la deducción de las formulaciones variacionales para varios modelos importantes en las aplicaciones en ciencias e ingeniería. 2. Modela problemas de ciencia e ingeniería usando formulaciones variacionales. 3. Analiza formulaciones variacionales aplicando técnicas provistas por la teoría.	
Bibliografía de la unidad		[9], [12], [23], [1], [17], [6], [19]	

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
3	RA1, RA2	Métodos de elementos finitos	5 semanas
Contenidos		Indicador de logro	
3.1. Problema modelo $-\text{div}(\gamma(x)\nabla u) = f$ difusión no homogénea con condiciones de borde Dirichlet. 3.1.1 Elementos básicos de la teoría: aproximación de Galerkin, noción de aproximación conforme. Error de aproximación, error de discretización y Lema de Céa. 3.1.2 Noción de triangulación, de subespacio aproximante y de elemento finito unisolvante. 3.1.3 Ejemplos de Elementos Finitos del tipo Lagrange: d -simplex (triángulos o tetraedros). Coordenadas baricéntricas. Operador de interpolación local. Teorema de unisolvencia de Nicolaidis. 3.1.4 Noción de Elementos Finitos afines equivalentes y ensamblaje de tales familias. Diámetro y redondez del Elemento Finito. Mallas regulares. Operador de interpolación global.		El/la estudiante: 1. Aplica el método de los elementos finitos a problemas de difusión en 2 o 3 dimensiones con diversas condiciones de borde. 2. Aplica el método de los elementos finitos a problemas de conducción en 2 o 3 dimensiones con diversas condiciones de borde. 3. Argumenta usando la teoría que sustenta el método de elementos finitos. 4. Justifica usando la teoría que valida la convergencia de las soluciones discretas a la solución continua.	

<p>3.2. Convergencia del método de elementos finitos.</p> <p>3.2.1 Generalidades sobre los resultados de convergencia o Lema de Cea.</p> <p>3.2.2 Lema de Deny Lions: estimación del error de interpolación por operadores invariantes en espacios de polinomios.</p> <p>3.2.3 Aplicaciones al caso de aproximación por elementos finitos en dominios poligonales. Teorema de estimaciones del error del método en H^k, $k \geq 1$.</p> <p>3.2.5 Lema de Aubin---Nitsche o método de dualidad. Estimación del error del método en L^2.</p>	
<p>Bibliografía de la unidad</p>	<p>[8], [1], [2] [14], [3], [5] [4] [19], [21], [24]</p>

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
4	RA1, RA2	Métodos de Volúmenes finitos	3 semanas
Contenidos		Indicador de logro	
<p>4.1 Preliminares. Mallas, espacio discreto y problema discreto.</p> <p>4.1.1 Un problema modelo elíptico en forma de divergencia. Formulación variacional.</p> <p>4.1.2 Mallas de Volúmenes Finitos admisibles.</p> <p>4.1.3 Espacio discreto y norma H^1 discreta. Desigualdad de Poincaré discreta.</p> <p>4.1.4 Discretización del problema continuo. Flujos y transporte discretos. Valor aguas arriba.</p> <p>4.2 Unicidad, convergencia y estimaciones del error del método de volúmenes finitos.</p> <p>4.2.1 Principio del máximo discreto y unicidad del método.</p> <p>4.2.2 Estimaciones a priori. Caso Dirichlet homogéneo.</p>		<p>El/la estudiante:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Aplica el método de los volúmenes finitos a problemas de difusión en 2 dimensiones con diversas condiciones de borde. 2. Aplica el método de los volúmenes finitos a problemas de conducción en 2 dimensiones con diversas condiciones de borde. 3. Analiza los resultados del método de los volúmenes finitos usando la teoría que lo sustenta. 4. Crea argumentos usando la teoría que valida la convergencia de las soluciones discretas a la solución continua. 	

<p>4.2.3 Teorema de compacidad de Kolmogorov. Lema de convergencia. Teorema de convergencia del método en L2 en el caso Dirichlet homogéneo.</p> <p>4.2.4 Teorema de convergencia en L2 en el caso Dirichlet no homogéneo.</p> <p>4.2.5 Estimaciones del error del método.</p>	
Bibliografía de la unidad	[7], [10], [16], [18]

Número	RA al que tributa	Nombre de la unidad	Duración en semanas
5	RA1, RA2	Temas de conducción, elasticidad, fluidos y ondas	1 semana
Contenidos		Indicador de logro	
<p>5.1 Problemas de controlabilidad</p> <p>5.2 Problemas de observabilidad</p> <p>5.3 Problemas inversos y Problemas espectrales</p>		<p>El/la estudiante:</p> <p>1. Analiza la aplicabilidad del análisis numérico de EDP a problemas de controlabilidad, observabilidad y a problemas inversos o espectrales.</p>	
Bibliografía de la unidad		[18]	

Temas Laboratorios

Número	RA al que tributa	Tema del Laboratorio	Ocurre en semana Método de Diferencias Finitas
Lab 0	RA1, RA2, RA3	Introducción.	1
Contenidos		Indicador de logro	
<p>Parte A. Comandos básicos y cálculo vectorial.</p> <p>Parte B. Funciones vectoriales.</p> <p>Parte C. Gráficos 1d, 2d y 3d.</p> <p>Parte D. Aplicaciones (ver bibliografía).</p>		<p>El/la estudiante:</p> <p>1. Aplica herramientas básicas del software Matlab y Scilab.</p>	
Bibliografía de la unidad			

Número	RA al que tributa	Tema del Laboratorio	Ocurre en semana
Lab1	RA3	Método de Diferencias Finitas	2
Contenidos		Indicador de logro	
<ul style="list-style-type: none"> • Parte A. Discretización del Problema. • Parte B. Resolución del Sistema Lineal • Parte C. Convergencia • Parte D. Otras condiciones de borde 		El/la estudiante: 1. Aplica el método de diferencias finitas a un problema sencillo unidimensional.	
Bibliografía de la unidad		[11]	

Número	RA al que tributa	Tema del Laboratorio	Ocurre en semana
Lab 2	RA3	Método de las Diferencias Finitas, Dominio Perforado	4
Contenidos		Indicador de logro	
Estudio de la ecuación de Poisson <ul style="list-style-type: none"> • Parte B. Aproximación por Diferencias Finitas. • Parte C: estudio de dominios curvos.ecuación de Poisson • Parte B. Aproximación por Diferencias Finitas. • Parte C: estudio de dominios curvos. 		El/la estudiante: 1. Calcula soluciones a la ecuación de Poisson en un rectángulo unitario y en un dominio perforado. 2. Analiza la aproximación mediante diferencias finitas para condiciones de borde en dominios con curvatura.	
Bibliografía de la unidad		[11]	

Número	RA al que tributa	Tema del Laboratorio	Ocurre en semana
Lab 3	RA3	Método de diferencias finitas, condición CFI	5
Contenidos		Indicador de logro	
<ul style="list-style-type: none"> • Parte A: Ecuación de Transporte y Difusión 		El/la estudiante: 1. Aplica el método de diferencias finitas a una ecuación de transporte y difusión.	

Número	RA al que tributa	Tema del Laboratorio	Ocurre en semana
Lab 3	RA3	Método de diferencias finitas, condición CFL	5
<ul style="list-style-type: none"> Parte B: Diferencias finitas y sistema lineal. Parte C: difusión numérica Parte D: condición CFL 		2. Aplica el método de diferencias finitas a una ecuación de evolución. 3. Aplica los conceptos de difusión numérica y condición CFL.	
Bibliografía de la unidad		[11], [13, cap 5]	

Número	RA al que tributa	Tema del Laboratorio	Ocurre en semana
Lab 4	RA3	Método de los Elementos Finitos, Problema EstacionarioTi	7
Contenidos		Indicador de logro	
Parte 1 : Problema estacionario Parte A: formulación variacional. Parte B: discretización por elementos finitos. Parte C: sistema lineal y solución numérica. RAG2,		El/la estudiante: 1. Calcula la formulación variacional de una ecuación de transporte y difusión. 2. Obtiene la discretización de una ecuación de transporte y difusión mediante el método de elementos finitos en el caso estacionario. 3. Resuelve numéricamente la discretización antes mencionada.	
Bibliografía de la unidad		[8], [24]	

Número	RA al que tributa	Tema del Laboratorio	Ocurre en semana
Lab 5	RA3	Método de los Elementos Finitos, CB Mixtas y Problema de Evolución.Ti	8
Contenidos		Indicador de logro	
Parte 2 : Problema estacionario con condiciones de borde mixtas Parte A: formulación variacional. Parte B: discretización por elementos finitos. Parte C: sistema lineal y solución numérica. Parte 3 : Problema de evolución Parte A: solución analítica aproximada.		El/la estudiante: 1. Calcula la formulación variacional de un problema estacionario con condiciones de borde mixtas. 2. Obtiene la discretización de un problema estacionario mediante el método de elementos finitos. 3. Resuelve numéricamente la discretización antes mencionada. 4. Formula el problema de evolución utilizando el método de elementos finitos en espacio y diferencias finitas en tiempo.	

Número	RA al que tributa	Tema del Laboratorio	Ocurre en semana
Lab 5	RA3	Método de los Elementos Finitos, CB Mixtas y Problema de Evolución.Ti	8
Parte B: Estudio del esquema de Crank---Nicolson.			
Bibliografía de la unidad		[24]	

Número	RA al que tributa	Tema del Laboratorio	Ocurre en semana
Lab 6	RA3	Método de los Elementos Finitos 2D/Volúmenes Finitos Ti	10
Contenidos		Indicador de logro	
<ul style="list-style-type: none"> Parte 1 : Descripción del paquete de programas básico Parte 2 : Formulación Teórica del Problema Parte 3 : resolución numérica y aplicación a un problema inverso 		El/la estudiante: 1. Aplica el método de los elementos finitos para resolver el problema en malla no estructurada con rutinas MATLAB.	
Bibliografía de la unidad		[8], [24]	

Número	RA al que tributa	Tema del Laboratorio	Ocurre en semana
Proyectos	RA3	Temas varios	12,13,14
Contenidos		Indicador de logro	
Al inicio del semestre se presentan a los alumnos los proyectos disponibles. Se les pide a los alumnos que seleccionen uno que se ajuste más a sus intereses a inicios hasta mediados de semestre. Los proyectos se pueden realizar en grupos pequeños. Ejemplos de temas de proyectos:		El/la estudiante: 1. Desarrolla grupalmente un proyecto numérico, el cual presenta en un primer avance a mediados de semestre y luego en una presentación final con los resultados obtenidos. 2. Aplica los conocimientos teóricos y numéricos aprendidos a un problema de mayor complejidad.	

Número	RA al que tributa	Tema del Laboratorio	Ocurre en semana
Proyectos	RA3	Temas varios	12,13,14
<ul style="list-style-type: none"> - Ecuación de flujo de la curvatura media y conjuntos de nivel - Ecuación del calor no lineal - El problema de Stokes - Un problema de ondas de superficie libre - Un problema de transmisión - Un problema de elasticidad - Generación de patrones 			
Bibliografía de la unidad		[24]	

E. Estrategias de enseñanza - aprendizaje:

El curso se estructura en base a distintas metodologías que incluyen:

- Clases expositivas donde se fomenta la participación de los estudiantes mediante consultas al/la profesor/a.
- Sesiones auxiliares prácticas en las cuales se realizan trabajos grupales a cargo de un profesor auxiliar.
- Experiencias de laboratorios.

F. Estrategias de evaluación:

Al inicio de cada semestre, el cuerpo académico informará oficialmente sobre la cantidad y tipo de evaluaciones, así como de sus ponderaciones. También anunciará si una inasistencia justificada se recupera mediante una evaluación adicional en las semanas siguientes a la evaluación original o al final del semestre, dependiendo del porcentaje de asistencia del estudiantado a la misma, o por la nota del examen.

Las instancias de evaluación que se contemplan son:

- 2 evaluaciones parciales y 1 Examen final.
- 6 laboratorios y el desarrollo de un proyecto aplicado.

La ponderación de cada evaluación respetará los reglamentos de la Escuela. En cada uno de estos controles y examen final se evaluará la capacidad del estudiante para escribir proposiciones abstractas de manera clara y precisa.

Esta evaluación se realiza de manera integral en la revisión de las evaluaciones y puede afectar un porcentaje de la calificación de cada una de ellas.

G. Recursos bibliográficos:

- [1] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, Editions de l'Ecole Polytechnique, Paris, 2006.
- [2] I. Babuska, A. K. Aziz, *Foundations of the finite element method*. In A. K. Aziz, editor, *The Mathematics Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, 3(362), Academic Press, New York, 1972.
- [3] C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti, *Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, *Mathématiques et Applications*, vol. 45, Springer, Paris, 2004.
- [4] J.-H. Bramble, S.-R. Hilbert, *Estimations of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transform and spline interpolation*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(6), 1237-1271, 1970.
- [5] S. Brenner, L.-R. Scott, *The mathematical theory of finite element method*, Springer, 2000.
- [6] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, 1983.
- A. Ern, J.-L. Guermond, *Theory and practice of Finite Elements*, *Applied Mathematical Series*, vol. 159, Springer, New York, 2004.
- [7] Z. Cai, *On the finite volume element method*, *Numer. Math.* 58, 713-735, 1991.
- [8] P.-G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [9] R. Dautray, J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique*, Tomos 3, 4, Masson, 1987.
- [10] R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin, *The Finite Volume Method*, *Handbook for Numerical Analysis*, Ph. Ciarlet J.L. Lions eds, North Holland, 2000, 715-1022.
- [11] P. Frey. *Numerical Analysis of PDEs*, notes du cours.
<http://www.ann.jussieu.fr/frey/m5105.html>
- [12] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations: Theory and Algorithms*, Springer, New York, 1986.
- [13] Mark Z. Jacobson, *Fundamentals of Atmospheric Modeling*. 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [14] M. Kirzek, P. Neittaanmaki, *Finite element approximation of Variational Problems and Applications*, London, Longman, 1990.
- [15] R.J. LeVeque, *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations*, SIAM, Philadelphia, 2007.

- [16] R.J. LeVeque, Finite Volume Methods For Hyperbolic Problems, Cambridge University
- Cleve V. Moler, Numerical computing with matlab, SIAM, Philadelphia, 2004.
Disponible en web: <http://www.mathworks.com/moler/chapters.html>
- [17] J. Necas, Les méthodes directes dans la théorie des equations elliptiques, Academia, Prague, 1967.
- [18] A. Quarteroni and A. Valli, Numerical approximation of partial differential equations, Springer Series in Computational Mathematics, 23, Springer, 1997.
- [19] P.-A. Raviart, J.-M. Thomas, Introduction a l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, 1998.
- [20] A. A. Samarskii, The theory of difference schemes, Marcel Dekker Inc, New York, 2001.
- [21] P. Solin, Partial differential equations and the finite element method, Wiley-Interscience, 2005.
- [22] A. Tveito and R. Winther, Introduction to partial differential equations: a computational approach, Texts in Applied Mathematics, 29, Springer, 1998.
- [23] R. Temam, Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis, 2nd ed, AMS Chelsea Publishing, Providence, 2001.
- [24] O. C. Zienkewich and R.L. Taylor, The finite element method for solid and structural mechanics. 6th ed. Elsevier, Amsterdam, 2005.

H. Datos generales sobre elaboración y vigencia del programa de curso:

Vigencia desde:	2014
Elaborado por:	Axel Osses
Validado por:	Jefe Docente (2024)
Revisado por	Área de Gestión Curricular