

MA 122 CÁLCULO II

(12 U.D.)

Distribución horaria 75/1 a 77/2
6.0 hrs. clases
3.0 " ejercicios
3.0 " trabajo personal

Distribución horaria 1974
Horario: 4,5 hrs. clases
3,0 " ejercicios
4,5 " Trabajo pers.

REQUISITOS:- MA 111, MA 121

I. INTRODUCCION : Derivación y aplicaciones de funciones estudiadas en MA 121 Cálculo I. Duración: 1 semana

1.- Derivadas de funciones racionales. Estudio gráfico de funciones polinomiales de una variable:

$$f(x) = \sum_{p=0}^n a_p x^p \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

2.- Derivadas de orden n de funciones del tipo

$$f(x) = \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}$$

3.- Derivada de orden n del producto $u(x) \cdot v(x)$

4.- Derivadas de orden n de funciones goniométricas (sen ax, cos ax, $P_n(x)$ sen ax; $P_n(x)$ cos ax si $P_n(x)$ es un polinomio de grado $n=n^\circ$ natural)

II: La función continua en $[a, b]$;-

- 1.- Continuidad en un punto según Cauchy y según Heine
- 2.- Continuidad uniforme y teoremas que derivan de ella
- 3.- Teorema de Rolle y del valor medio generalizado
- 4.- Clase de discontinuidades de una función. Determinación de ciertos límites denominados " formas indeterminadas "
- 5.- Desarrollo de Taylor, con el resto en la forma generalizada de Schlömilch y los casos especiales de Lagrange y Cauchy
- 6.- Método de Newton para resolver ecuaciones numéricas. Cotas de las raíces de una ecuación algebraica.

III. Las funciones e^x , a^x y $\log x$:

- 1.- Definición de la función e^x y de a^x
- 2.- Definición de $\log x$, como función inversa de la exponencial
- 3.- Derivadas de las funciones e^x , $\log x$ y sus gráficos
- 4.- Definición de las funciones hiperbólicas y sus representaciones gráficas. Relaciones fundamentales. Funciones hiperbólicas
- 5.- Desarrollo de Taylor de las funciones sen x, cos x, e^x , senh x, cosh x y $\log(1+x)$.

IV. Cálculo de la función primitiva (antiderivación):

- 1.- Definición de primitiva y el operador \int . Primitiva de $c f(x)$ y de $f(x) + g(x)$

1.- Integrales usuales

3.- Método de integración por transformación de la función bajo el signo \int : se incluyen aquí las integrales de funciones trigonométricas como ser:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx; \int \cos^m x \sin^n x \, dx; \int \frac{dx}{\sin x}; \int \frac{dx}{\cos x}$$

4.- Integración por cambio de variable. Se incluyen las que se resuelven por una sustitución de función hiperbólica o trigonométrica. Por ejemplo:

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx; \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx; \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx, \text{ etc.}$$

5.- Integración de funciones racionales. (Todos los casos)

VI. La integral definida como variación de la primitiva en un intervalo

[a, b].

- 1.- La velocidad y la aceleración como derivadas del camino recorrido y la velocidad, respectivamente
- 2.- La ordenada de una curva como derivada de un área
- 3.- Área de un sector en coordenadas polares
- 4.- Una sección de un cuerpo como derivada de un volumen con respecto a la variable "distancia de la sección plana a un plano fijo"
- 5.- Volúmenes de revolución

VII. Integrales de funciones reductibles a funciones racionales

VIII. Integrales que se calculan por recurrencia

IX. Integración numérica. (Simpson y método de los trapecios). Estimación de los errores en la aplicación de estos métodos.

X. Teoría de la integral definida según Riemann

- 1.- Concepto de función definida y acotada en $[a, b]$
- 2.- Concepto de partición del intervalo $D = \{a, x_1, x_2, \dots, b\}$
- 3.- Las sumas $S(f, D)$ y $s(f, D)$ y teoremas relativos a ellas

Definición de $\int_a^b f(x) \, dx$; $\int_{-a}^b f(x) \, dx$ y $\int_a^b f(x) \, dx$

- 4.- Teorema de Darboux
- 5.- Condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ sea integrable (R) en $[a, b]$
- 6.- Integrabilidad de una suma, un cociente y de

$$\int_a^b |f(x)| \, dx \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \quad \text{Teorema del valor medio}$$

- 7.- Teorema fundamental de la integración
- 8.- Integral de Riemann-Stieltjes y aplicaciones

X. Aplicaciones de la integración (continuación)

- 1.- Concepto de curva. Arco de curva plana
- 2.- Áreas engendradas por rotación de un arco
- 3.- Centros de gravedad (centroide); arcos y áreas planas. Momentos de inercia

XI. Integrales impropias de la 1ª y 2ª clase y criterios de convergencia y divergencia

- 1.- Regla $\int_a^{\infty} f(x) dx < M, \mu > 1$ para integrales impropias de primera clase
- 2.- Regla $\int_a^{\infty} f(x) dx < M, 0 < \mu < 1$ para integrales impropias de segunda clase si $t(a) = \pm \infty$

- 3.- Estudio de $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$. Fórmula de recurrencia;

$$\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$$

4. La función B $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ (dar la fórmula dejando la demostración en Cálculo III)

- 5.- Estudio de algunas integrales como ser:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \int_0^{\infty} e^{-ax} f(x) dx, \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

XII. Nociones topológicas en E^n

- 1.- Concepto de espacio topológico. Espacio de Hausdorff y sus axiomas
- 2.- Métrica en E^n . Métrica euclídea y normada. Concepto de esfera de vecindad
- 3.- Aplicaciones de E^1 y E^2 en E^n . Concepto de vector y función vectorial en E^3 . Aplicaciones de E^1 en E^n y el concepto de curva.
- 4.- Continuidad y derivación de una función vectorial. Concepto de vector tangente.
- 5.- Nociones de álgebra vectorial:
 - i) Producto escalar y $|\vec{u}|$: ángulo de dos vectores
 - ii) Identidad de Lagrange y desigualdad de Schwarz
 - iii) Concepto de arco de curva. Cálculo de un arco
 - iv) Curvatura de una curva en E^n
 - v) Producto vectorial en E^3 . Producto mixto en E^3 . Doble producto vectorial en E^3
- 6.- Plano osculador en un punto de una curva en E^3 . Tangente normal y binormal en un punto de una curva. Planos asociados en un punto de una curva.
- 7.- Curvatura, torsión, fórmulas de Serret-Frenet

XIII. Sucesiones y series

- 1.- Repaso de algunos teoremas sobre límite de sucesiones
- 2.- Sucesiones en un espacio métrico de Hausdorff. Sucesiones de Cauchy
- 3.- Series numéricas
 - i) Series de términos positivos. Reglas de convergencia de D'Alembert, Cauchy y Raabe.
 - ii) Criterio integral de Cauchy
 - iii) Series alternantes: absolutamente y semiconvergentes
- 4.- Series de funciones de una variable. Concepto de convergencia uniforme. Criterio de Weierstrass. Integración y derivación de series uniformemente convergentes.
- 5.- Series de potencia. Concepto de radio de convergencia. Teorema de Abel. Derivación e integración de las series de potencia y aplicaciones. Determinaciones del desarrollo en series de algunas funciones usuales.