(curso para repitentes de 1er. año)

MA 11B ALGEBRA LINEAL

(curso semestral - 20 U.D.)

DISTRIBUCION HORARIA:

4.5 hrs. clases cátedra
1.5 hrs. de clases auxiliares
14.0 hrs. de trabajo personal

REQUISITOS:

OBJETIVOS:

Este curso está diseñado para alumnos que tienen un conocimiento básico de álgebra y álgebra lineal y se centra en las nociones fundamentales del álgebra lineal y de la geometría analítica.

PROGRAMA:

1.- **El Método de Gauss.** (6,0 hrs.)

Motivar la necesidad de resolver sistemas lineales. A partir de la ecuación vertorial $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b$ con $v_i, \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^m$, escribir el sistema lineal de $m \times n$. Para sistemas cuadrados, deducir que $Ax = b$ tiene solución única $\forall b \Leftrightarrow (Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0)$. Interpretar cada ecuación como la ecuación de un hiperplano y la solución del sistema como la $\cap$ de hiperplanos. Sistemas equivalentes. Conjunto solución. Reajuste de Gauss. Casos en que no existe solución, existe y es única, existe y no es única. Ejemplos: casos especiales, sistemas estructurados, poco densos. Número de operaciones y propagación del error (elección del pivote). Mal condicionamiento con la perspectiva geométrica de intersectar rectas muy parecidas.

2.- **Espacios vectoriales.** (9,0 hrs.)

Axiomas de cuerpo cualquiera, aclarando que será $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ cuando se especifique. Ejemplos $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}, P^n$ sobre $\mathbb{R}, F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C|a, b|, \mathbb{C}^n$. Subespacios vectoriales: definición, caracterización y ejemplos de los anteriores. Dependencia, independencia lineal, generadores, bases dimensiones, completación de bases, sumas e intersecciones de s.e.v., suma directa: $\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 -$

$\dim(S_1 \cap S_2)$. Ejemplos. Isomorfismos entre espacios vectoriales $DimE = n \Longleftrightarrow$ E isomorfo a $\mathbb{R}^n$; vector de coordenadas. Ejemplo: $P^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, independencia lineal en P^n (escribirlo como sistema lineal homogéneo en $\mathbb{R}^{n+1}$).

3.- **El Espacio Vectorial $\mathbb{R}^3$.** (4,0 hrs.)

Rectas y planos, s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Producto punto, norma euclidiana, proyecciones ortogonales.

4.- **Aplicaciones Lineales y Matrices** (18,0 hrs.)

Def. $T : E \to F$ lineal, ejemplos. Teorema de caracterización de una aplicación lineal cuando dim $E = m$. Ejemplos: rotación plana, derivada : $P^n \to P^{n-1}$, vector de coordenadas, proyecciones ortogonales, identidad. Cuando dim $F = n$, pasando por vector de coordenadas, aplicando el teorema anterior. Obtener la matriz representante del sistema de ecuaciones $|T(v)|_{B'} = |T|_{BB'}|v|_B$. Ejemplos: de los anteriores obtener las matrices representantes para distintas bases. El espacio vectorial $\mathcal{L}(E_B, F_{B'})$. El espacio vectorial $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Base canónica de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, subespacios de$M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Isomorfismo entre $\mathcal{L}(E_B, F_{B'})$ y $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Núcleo, Imagen: definiciones, probar que son s.e.v. Rango y nulidad. Traducir de aplicación lineal a matriz y soluciones de sistemas. Ejemplos. T inyectiva $\Leftrightarrow \mathcal{N}(T) = \{O_E\}$. T inyectiva $\Rightarrow T$ transforma familias libres en familias libres. Teorema de las dimensiones. Traducir a matrices. Ejemplos (dim$E$ = dim$F = n$. Equivalencias: $Ax = b$ tiene solución única $\forall b \Leftrightarrow (Ax = O \Rightarrow x = O_{\mathbb{R}^n}) \Leftrightarrow A$ es de rango completo $\Leftrightarrow rg(T) = n \Leftrightarrow T$ inyectiva. Composición de aplicaciones lineales y producto de matrices. Ejemplos. Escribir el producto de matrices en términos del producto punto en $\mathbb{R}^n$. Invertibilidad de T y $|T|_{BB'}$. Matrices de pasaje. A invertible $\Leftrightarrow A$ es de pasaje. Conservación del rango al componer (multiplicar) con aplicación lineal invertible (por matriz de pasaje). Ejemplo con cambio de bases. Matriz transpuesta y simétrica: la transformación y el producto; rango de la transpuesta. Diagonal dominancia e invertibilidad. Matrices elementales y sus inversas. Gauss como producto de matrices elementales: $LAP = DU$(L producto de elementales del ajuste de Gauss, P matrices de permutaciones, D diagonal y U con 1^{nos} en la diagonal). Descomposición LDL^t. Sistemas triangulares, que se deben resolver por sustitución.

5.- **Producto Interno y Producto Hermítico** (6,0 hrs.)

Definiciones, norma inducida, propiedades, ejemplos en $\mathbb{R}^n, C|a,b|P^n(\mathbb{R}), \mathbb{C}^n, M_{m\times n}(\mathbb{R}), M_{m\times n}(\mathbb{C})$, ortogonalidad, $v \perp w \Rightarrow v, w$ l.i. Gramm-Schmidt. Proyección ortogonal (ejemplos de lo anterior). Propiedades de la proyección ortogonal, complementariedad, dimensiones.

6.- **Determinantes** (6,0 hrs.)

Definición según el teorema de existencia y unicidad como función n-lineal en las n filas (Strang). Deducir de las 3 propiedades que lo definen, las otras propiedades. Cálculo del determinante de una matriz de 2×2 aplicando las propiedades. Cálculo del determinante de una matriz A aplicando las propiedades. Aplicar el método de Gauss (la descomposición en producto de matrices) y sus propiedades para obtener método de cálculo efectivo y para deducir Det $(A^1) =$ Det (A). Fórmula de los Co-Factores, regla de Cramer,Inversa. Ejemplo: Comentar su relevancia no como método de cálculo efectivo sino como resultado teórico y como fórmula especialmente apropiada para matrices por bloques. (Det$(A) = O \iff A$ singular (no invertible) (agregar a la lista de equivalencias de A invertible).

7.- **Valores y Vectores Propios**. (9,0 hrs.)
Definición para aplicación lineal y matriz s.e.v. de vectores propios. Polinomio característico. Ejemplos. Problemas a enfrentar: las raíces del polinomio pueden ser complejas; cálculo efectivo. Similaridad. Valores propios de una matriz diagonal y de una matriz A. Propiedades: vectores propios asociados a vp distintos son l.i., valores y vectores propios de la transpuesta, valores y vectores propios de matrices similares. Diagonalización de matrices. Matrices simétricas y herméticas.

8.- **Formas Cuadráticas** (4,0 hrs.)
Motivación: $f : I\!R^n \to I\!R$ estudiar sus puntos críticos. Definición. propiedades: toda forma cuadrática asociada a una matriz se representa (de manera única) por una matriz simétrica. Forma normal o canónica. Teorema de maximización y minimización. Matrices y formas cuadráticas, definidas positivas y definidas negativas. Cálculo del máximo o del mínimo. Ejemplos. Interpretación geométrica para $f : I\!R^2 \to I\!R$.

9.- **Forma Normal de Jordan.** (5,0 hrs.)
Introducción de la notación y ejemplos. Enunciado y demostración del Teorema de Jordan. Aplicaciones a ecuaciones diferenciales y de diferencias.

BIBLIOGRAFIA:

- BRINKMANN, H. & KLOTZL, E., Linear Algebra and Analytic Geometry, Addisson Wesley (1971).
- HOFFMAN, K. & KUNZE, R., Algebra Lineal, Prentice Hall (1973).
- LESIEUR & al., Algèbre Linéaire, Géométrie, Armand Colin, (1977)
- NERING, E., Linear Algebra and Matrix Theory, John Wiley, (1963).
- STRANG, G., Algebra Lineal y sus aplicaciones, Fondo Educativo Interamericano (1982).
- GOLES, E., SAN MARTIN, J., DARTNELL, P., Apuntes de Algebra Lineal Departamento de Ingeniería Matemática.