CURSO: Introducción a la Geometría No Conmutativa
DISCIPLINA: Matemáticas
SIGLA: MPG3435
CRÉDITOS: 10
CARÁCTER: Optativo
REQUISITOS: XXXXXXX, XXXXXXX
DOCENTE: Giuseppe De Nittis (gidenittis@mat.uc.cl)
CÁTEDRA: Lunes y Miércoles – módulo 2 (10:00 – 11:20)
ATTENCIÓN DE ESTUDIANTES: A coordinar pro correo electrónico.

I. Descripción

En los últimos años, un nuevo enfoque matemático ha emergido como una disciplina importante: la *geometría no-conmutativa*. Una de sus motivaciones primarias ha sido la física cuántica, que sugiere que para describir la “geometría del mundo”, las tres (o cuatro) coordenadas cartesianas no son suficientes. Por otro lado, la geometría algebraica moderna pone gran énfasis en el tratamiento categórico de las variedades, más allá de los conjuntos de soluciones de ecuaciones polinomiales. Este tratamiento ha dado lugar a diversos tipos de “espacios generalizados”. Desde 1980, cuando surgió el primer ejemplo de un espacio generalizado con una geometría diferencial bien definida, estas tendencias han sido concretadas en una teoría impulsada por Alain Connes y sus seguidores. Este curso pretende ser una invitación a los fundamentos de esta nueva geometría.

El curso se divide esencialmente en tres partes:

a) Partiremos de unas variedades diferenciales muy sencillas de baja dimensión y alta simetría: la recta R y el círculo S^1, en dimensión uno; el plano R^2, el toro T^2 y la esfera S^2, en dimensión dos; y sus an´alogos R^3, T^3 y S^3 en dimensión tres. Además, conviene considerar el ejemplo humilde de un espacio finito F, el cual es un ejemplo trivial de variedad diferencial de dimensión cero. Nuestra tarea consiste primeramente en aprender cómo comprender cada uno de estos espacios desde sus álgebras de coordenadas.

b) En seguida, hay que darse cuenta de las diversas maneras de generalizar estas álgebras de coordenadas para introducir las llamadas “espacios cuánticos” que son sus primos hermanos. Un proceso apodado “torcedura” da lugar al toro no conmutativo T^2_q y al plano de Moyal R^2_q. Una receta diferente, llamada “q-deformación”, produce las esferas cuánticas S^2_q y S^3_q.

c) Los espacios no conmutativos pueden estudiarse en diversos niveles. En el nivel topológico, donde lo importante es determinar si el espacio es compacto o conexo, basta usar (el análogo de) un álgebra de funciones continuas como sus coordenadas. En el nivel diferencial, hay que usar álgebras de funciones suaves. En el nivel métrico, hay que emplear una herramienta que, ordinariamente, permite medir la distancia entre dos puntos. Esta herramienta, que se toma prestado de la mecánica cuántica, es el llamado operador de Dirac y uno de los resultados más profundos de la geometría no-conmutativa es que la información métrica reside en los autovalores del este operador. Se ejemplificará este cálculo en cada uno de los casos concretos mencionados *anteriormente.*

El curso es preparatorio para actividades de investigación, por ejemplo tesis de doctorado, en Geometría No Conmutativa.

II. Prerequisitos

- El prerequisito esencial es un buen curso de álgebra lineal. Esta disciplina es una fusión de temas del álgebra y del análisis con los tópicos propios de la geometría. En este sentido, ejemplifica la unificación de las matemáticas que caracteriza el siglo XXI.

- El segundo prerequisito es un curso de geometría diferencial ya que, conceptualmente, la geometría no conmutativa es una extensión de la geometría diferencial ordinaria.

III. Objetivos de aprendizaje

Al finalizar el curso los estudiantes serán capaces de:

1. Conocer la equivalencia functorial entre espacios clásicos y algebras conmutativas.

2. Conocer la equivalencia functorial entre fibrados vectoriales y módulos proyectivos.

3. Comprender la interconexión entre el operador de Dirac y el funcional "distancia".

4. Comprender la estructura algebraica de las teorías de cohomología.

5. Aplicar el concepto de deformación para obtener espacios no conmutativos a partir de análogos clásicos.

6. Crear nuevo ejemplos de espacios cuánticos y estudiar sus geometría.

7. Leer críticamente artículos recientes de investigación sobre temas relacionados con el curso.

8. Realizar charlas acerca de argumentos avanzados, relacionados con el curso, elegido de forma autónoma por el estudiante.

9. Plantear preguntas y críticas acerca de los contenido del curso en debates grupales.

IV. Contenidos

Los contenidos centrales del curso son:

1. Espacios finitos discretos y no discretos:
   - Un preaviso de espacios cuánticos.

2. Algebras conmutativas de coordenadas:
   - La correspondencia de Gelfand;
   - El teorema de Guelfand y Naimark;
   - Introduccíon a las C*-álgebras.

3. El concepto de fibrado vectorial:

- Módulo de secciones;
- Módulos proyectivos;
- La correspondencia de Serre y Swan.

4. Ejemplos de espacios cuánticos:
   - El círculo $S^{1;}$
   - La geometría de la esfera S^2;
   - La geometría de la esfera S^3;
   - El toro no conmutativo T^2;
   - El plan Moyal.

5. La medición de distancias:
   - De las geodésicas al método espectral;
   - El concepto de triple espectral.

6. Homología cíclica y su relación con la K-teoría:
   - Homología de Hochschild;
   - Homología cíclica;
   - Teoria de de-Rham "non-commutativa" y caracter de Chern;

7. Temas optativos:
   - El concepto de q-deformación de un álgebra de coordenadas;
   - Area y volumen en geometría no conmutativa;
   - Aplicaciones en física (modelo estándar) y matemáticas (foliaciones, teoría de los números).

V. Metodología

Fundamentalmente se busca que el estudiante sea protagonista de su propio aprendizaje. Se pretende desarrollar una actitud activa, intentando desarrollar actividades de reflexión, de análisis, de observación, etc. Cada estudiante se debe comprometer en el desarrollo directo de la asignatura, participando en la formulación de preguntas, en la solución de inquietudes y en el estudio autónomo de temas avanzados. Para este fin, la metodología propuesta es la siguiente:

- Las clases serán expositivas con interacción constante con los estudiantes. En particular, se les pedirá a los estudiantes que participen activamente en el desarrollo de la clase contestando a preguntas que se tratará de responder de manera grupal.

- Se realizarán clases semanales de ayudantías, donde se trabajará de manera grupal para solucionar ejercicios estructurados propuestos por el profesor al fin de reforzar los conceptos básicos a través del debate y la colaboración.

- Cada alumno deberá elegir, con la supervisión del profesor, un artículo de investigación avanzada sobre temas relacionados con el curso. El alumno tendrá la duración total del curso para leer e interiorizar el artículo. Además el deberá escribir un ensayo (máximo 20 páginas) y preparar una exposición oral (30 minutos) acerca de los contenidos del artículo.

VI. Evaluación

La nota final se otorgará como suma de tres contribuciones:

- Una primera contribución, que viene de dos exámenes escritos (problemas con desarrollo), mide el grado de comprensión de los temas tratados en el curso.

Los dos exámenes se programarán en el medio y al cierre del curso. El promedio de las notas de los exámenes vale el 60% de la nota final.

- Una segunda contribución, que depende de un ensayo (max 20 páginas) y una exposición oral (30 minutos) sobre un argumento opcional, mide la habilidad del estudiante para abordar temas avanzados de investigación de forma individual. Este trabajo será evaluado por el profesor también sobre la base de las opiniones de los otros estudiantes y vale el 30% de la nota final.

- Una tercera contribución, que viene de la participación en las clases de ayudantías, mide la perseverancia y el compromiso de cada estudiante durante el curso. Esto será evaluado por la observación directa del profesor y vale el 10% de la nota final.

La nota final es entre 1 y 7 y la nota minima para aprobar es 4.

La inasistencia a los exámenes debe ser debidamente justificada en la dirección de docencia del la facultad a la que pertenece el alumno en los plazos adecuados.

En caso de conducta de plagio o deshonestidad durante las pruebas de evaluación, el estudiante será evaluado con una nota 1.

VII. Cronograma

Sigue un cronograma (aproximado) de la actividad didáctica y evaluativa. Para los contenido ver Sección IV. Para la estrategia de evaluación ver Sección VI.

	Contenidos	**Evaluaciones**
Marzo	1 y 2	
Abril	3 y 4	
Mayo	5	Examen 1
Junio	6	
Julio	7	Examen 2 + ensayo y exposición oral

VIII. Bibliografía

1. Alain Connes, “Noncommutative Geometry”, Academic Press, London, 1994.

2. José M. Gracia-Bondía, Joseph C. Várilly y Héctor Figueroa, “Elements of Noncommutative Geometry”, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Boston, 2001.

3. Masoud Khalkhali, “Basic Noncommutative Geometry”, EMS Publishing House, Zürich, 2009.

4. Giovanni Landi, “An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometry”, Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin, 1997.

5. Thomas Timmermann, “An Invitation to Quantum Groups and Duality”, EMS, Publishing House, Zürich, 2008.

6. Joseph C. Várilly, An Introduction to Noncommutative Geometry, EMS Lectures in Mathematics 4, EMS Publishing House, Zürich, 2006.