PROGRAMA DE CURSO

Nombre de la Actividad Académica	Medida e Integración	
Nombre de la Actividad Académica en inglés	Measure and Integration	
Unidad Académica/organismo que lo desarrolla	Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile	
Ámbito	Ámbito de Formación Matemática Ámbito de Habilidades Fundamentales para la Investigación Ámbito de Comunicación del Saber Disciplinario	
Tipo de créditos	Presencial	No Presencial
	5	4
Número de créditos SCT – Chile	9	
Requisitos	Espacios Métricos y Normados	

Propósito General del curso
El estudiante se familiariza con los fundamentos de la Teoría de la Medida y sus conexiones con la Teoría de Espacios Normados. Estos fundamentos le permitirán asimilar el vocabulario asociado que deberá utilizar en sus aprendizajes posteriores en los cursos de áreas que lo requieren, como Probabilidades o Análisis Funcional. Para lograr todo esto, el contenido del curso se ofrece en cátedras regulares, suplementadas con guías de ejercicios parcialmente resueltas durante ayudantías. En ambas instancias se presentan, a título de ejemplo, razonamientos rigurosos de diversa índole. Tanto las guías de ejercicios como las evaluaciones del curso exigen del estudiante que presente demostraciones rigurosas de sus afirmaciones.
Competencias del perfil de egreso a las que contribuye el curso
FM 1, FM 2, HFI 3, CSD 1
Competencias sello
CS 1, CS 2, CS 3
Sub-competencias
FM 1.1, FM 1.2, FM 2.1, FM 2.2, HFI 3.1, HFI 3.2, CSD 1.1, CSD 1.2

Resultados de Aprendizaje

1. *Demuestra propiedades sobre conjuntos medibles utilizando correctamente el lenguaje de la teoría de la medida de Lebesgue para establecer la veracidad de sus afirmaciones.*
2. *Aplica los teoremas clásicos de funciones Lebesgue medibles para analizar propiedades de funciones reales de variable real tales como continuidad y continuidad uniforme.*
3. *Distingue adecuadamente entre los distintos tipos de convergencia de funciones y aplicarlos en el estudio de propiedades cualitativas de funciones.*
4. *Utiliza los teoremas de convergencia de integrales para resolver problemas que involucren aproximación de funciones con el objetivo de facilitar el cálculo de integrales y proporcionar información detallada sobre las propiedades de las funciones involucradas.*
5. *Conoce las diferencias que existen entre la teoría de integral de Riemann y la teoría de integral de Lebesgue para aplicarlos en el estudio de funciones y la definición de espacios funcionales.*
6. *Aplica los teoremas clásicos de funciones Lebesgue medibles de varias variables para simplificar cálculos y facilitar el estudio de funciones definidas en espacios de dimensión superior.*

Saberes/ Contenidos

1. **Medida de Lebesgue:** Álgebras y sigma-álgebras de Borel. Medida exterior de Lebesgue. Propiedades de medidas, continuidad de la medida. Conjuntos F_sigma y G_delta. Lema de Borel-Cantelli. Existencia de conjuntos no-medibles según Lebesgue. Conjunto de Cantor y función de Cantor.
2. **Funciones Lebesgue medibles:** Sumas, productos y composición. Convergencia puntual y Teorema de aproximación simple. Principios de Littlewood. Teorema de Egorov y Teorema de Lusin.
3. **Integral de Lebesgue:** Integral de funciones medibles acotadas. Teorema de convergencia acotada. Integral de funciones medibles no-negativas. Teorema de convergencia monótona. Integral general de Lebesgue. Teorema de convergencia dominada. Continuidad de la Integral. Integrabilidad uniforme y teorema de convergencia de Vitali. Conjuntos ajustados y teorema de convergencia de Vitali General. Convergencia en medida y desigualdad de Chebychev.
4. **Diferenciación:** Funciones monótonas. Derivabilidad de funciones monótonas y teorema de Lebesgue. Funciones de variación acotada. Teorema de Jordan. Funciones absolutamente continuas. Teorema fundamental del cálculo. Teorema de Radon-Nikodym. **Opcional:** Medidas signadas y teorema de descomposición de Hanh
5. **Espacios de funciones p-integrables:** Definición del espacio L_p. Funciones escencialmente acotadas. Desigualdades clásicas: Cauchy-Schwarz, Hölder y Minkowski. Teorema de Riesz: L_p es completo. Separabilidad. Conjuntos densos en L_p. **Opcional:** Función distribución y espacios L_p-débiles, espacios de Lorenz.

6. **Medidas producto:** Medidas y conjuntos medibles en espacios de medida. Teorema de extensión de Caratheodory. Definición de medidas producto. Teorema de Fubini y Tonelli. Medidas de Lebesgue en R^n e integración en R^n. Convolución. Desigualdad de Young para convoluciones. Aproximaciones de la unidad en L_p.

Metodologías

El contenido del curso se ofrece en cátedras regulares, suplementadas con guías de ejercicios parcialmente resueltas durante ayudantías. En ambas instancias se presentan, a título de ejemplo, razonamientos rigurosos de diversa índole. Tanto las guías de ejercicios como las evaluaciones del curso exigen del estudiante que presente demostraciones rigurosas de sus afirmaciones.

Evaluación

1. Controles escritos periódicos y tareas cuyo promedio (PC) corresponde a un 10% de la nota de presentación a Examen (NP).
2. Tres pruebas parciales escritas (P1, P2, P3) cada una de las cuales corresponde al 30% de la nota de presentación.
3. Si alguien no rinde una prueba justificadamente tiene que recuperar la evaluación con una prueba a final de semestre la cual tiene un carácter global.

- Fecha Prueba 1: **Martes 16 abril 2024**
- Fecha Prueba 2: **Martes 28 mayo 2024**
- Fecha Prueba 3: **Jueves 11 julio 2024**
- Fecha Prueba Global : **Jueves 18 julio 2024**

Requisitos de aprobación

- Si NP es mayor o igual 4.0 entonces se aprueba el curso (NotaFinal=NP)
- Si NP es menor o igual a 3.4, entonces se reprueba el curso (NotaFinal=NP)
- Si NP es mayor o igual a 3.5, y menor o igual a 4.0, se puede rendir una prueba global (PG) donde la nota final se calcula

  0.7*NP+0.3*PG

  Si en este caso la nota es inferior a 4.0 el curso es reprobado.

Palabras Claves

Álgebras y sigma-álgebras, medida exterior, medida de Lebesgue, conjuntos medibles según Lebesgue, funciones medibles, integral de Lebesgue, teoremas de convergencia, espacios L_p y medidas producto.

Bibliografía Obligatoria (No más de 5 textos)

(Textos de referencia a ser usados por los estudiantes y que estén en la biblioteca. Se sugiere la utilización del sistema de citación APA, y además que se indiquen los códigos ISBN de los textos. Cada texto debe ir en una línea distinta)

1. *Royden, H. (1968). Real analysis . Disponible en http://bibliografias.uchile.cl/2939*
2. *Folland. (1999). Real analysis : modern techniques and their applications (2nd ed.). Wiley.*
3. *Kolmogorov, Fomin, S. V., & Fomin, S. V. (Sergei V. (1961). Measure, Lebesque integrals, and Hilbert space. Academic Press.*

Bibliografía Complementaria

4. *Halmos, P. (1950). Measure theory . Disponible en http://bibliografias.uchile.cl/2933*
5. *Folland. (1999). Real analysis : modern techniques and their applications (2nd ed.). Wiley.*
6. *Rudin. (1987). Real and complex analysis (3rd ed.). McGraw-Hill.*
7. *Kolmogorov, Fomin, S. V., & Fomin, S. V. (Sergei V. (1961). Measure, Lebesque integrals, and Hilbert space. Academic Press.*
8. *Burkill. (1967). Real and Abstract Analysis. By E. Hewitt and K. Stromberg Pp. viii, 476. 1965. (Springer-Verlag.). Mathematical Gazette, 51(378), 365–366. https://doi.org/10.2307/3613000*
9. *De Barra. (2011). Measure theory and integration (2nd ed.). Woodhead Publishing.*
10. *Evans, & Gariepy, R. F. (1992). Measure theory and fine properties of functions. CRC Press.*
11. *Bartle, R.G. (1995). The elements of integration and Lebesgue measure. Wiley Interscience.*

Recursos Web

Recursos de referencia para el apoyo del proceso formativo del estudiante; se debe indicar la dirección completa del recurso y una descripción del mismo; CADA RECURSO DEBE IR EN UNA LÍNEA DISTINTA)